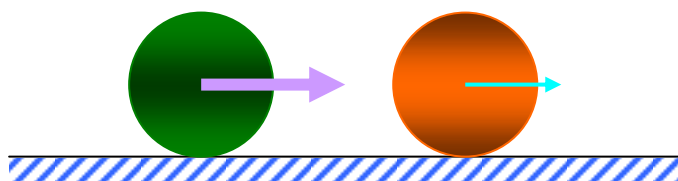


證明動能在完全非彈性碰撞損失最大

兩物體進行正碰撞 (head on collision) :



1. 無論動能(kinetic energy)守恆否，總動量(momentum)必定守恆 (conserved)。

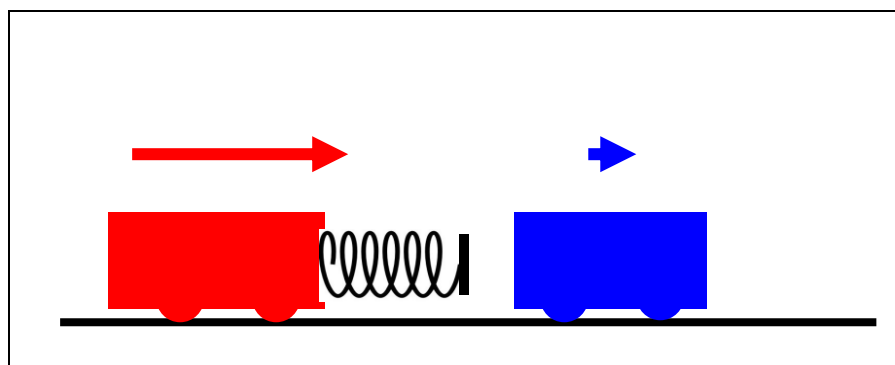
$$m_1v_1 + m_2v_2 = \text{常數 } C \quad \dots\dots\dots(1)$$

當動能(大約)守恆，碰撞稱為「彈性碰撞」(elastic collision)；動能百分百守恆的，就稱為「完全彈性碰撞」(completely elastic collision)；動能不守恆的，碰撞稱為「非彈性碰撞」(inelastic collision)，其中不守恆得最厲害的，就稱為「完全非彈性碰撞」(completely inelastic collision)。

當兩物體碰撞後速度相同，此碰撞就是完全非彈性，亦即是在動量守恆的規範下動能損失最多的情況。

2. 以一個特例作證明

想像兩小車相撞，它們之間安裝一個彈簧。



要發生碰撞，紅車必先要追及藍車。

兩車剛接觸時，紅車速度 $>$ 藍車速度，所以彈簧長度不斷壓縮。彈簧的勢能增加，即是兩小車的總動能不斷減少（總機械能守恆）。

紅車受到向後的力作用，所以紅車減速；藍車受向前的力作用，所以藍車加速。兩車的速度趨向相同。若仍然是紅車速度 $>$ 藍車速度，那彈簧的長度仍繼續減少（彈性勢能增加）。即是兩車的動能仍繼續減少。

紅車繼續減速，藍車繼續加速，最後必然是

紅車速度 = 藍車速度，

然後再變成紅車速度 $<$ 藍車速度。

在轉為 紅車速度 $<$ 藍車速度後，彈簧長度增加，即是彈簧勢能減少，小車的總動能不斷增加。

即是說，在紅車速度 = 藍車速度 之時，彈簧長度最短。那時，彈性勢能最大，兩小車的總動能必是最小。

3. 數學直接證明：

兩物體總動能 $E_k = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \dots\dots\dots(2)$

把 (1) 代入 (2)，消去 v_2 ，

$$2E_k = m_1v_1^2 + m_2\left(\frac{C - m_1v_1}{m_2}\right)^2$$

整理後，得

$$2E_k = \frac{m_1}{m_2}(m_1 + m_2)v_1^2 - 2C\left(\frac{m_1}{m_2}\right)v_1 + \frac{C^2}{m_2} \dots\dots\dots(3)$$

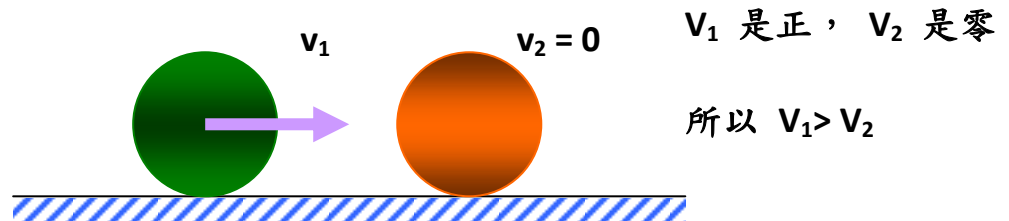
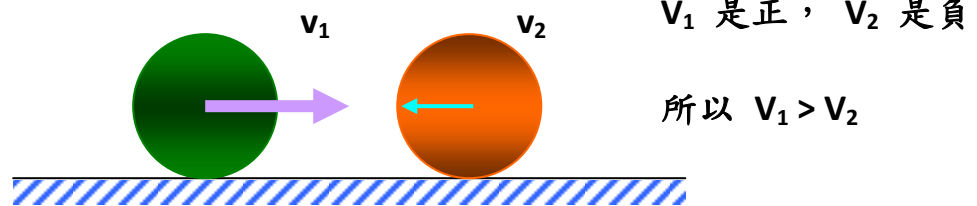
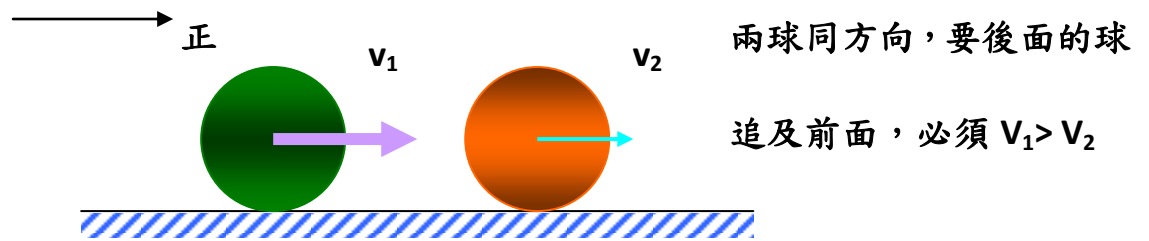
我們知道當 $x = -\frac{b}{2a}$ ，二次函數 $ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 的值最小。

從 (3)，得當 $v_1 = \frac{C}{m_1 + m_2}$ ， E_k 最小。

代 $v_1 = \frac{C}{m_1 + m_2}$ 入(1)，亦得 $v_2 = \frac{C}{m_1 + m_2}$ 。即 $v_1 = v_2 = \frac{C}{m_1 + m_2}$ 的時，總動能最小。

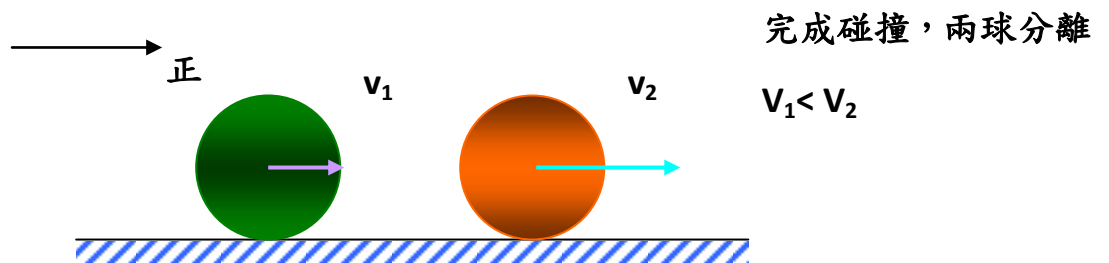
4. 另一個說明和證明

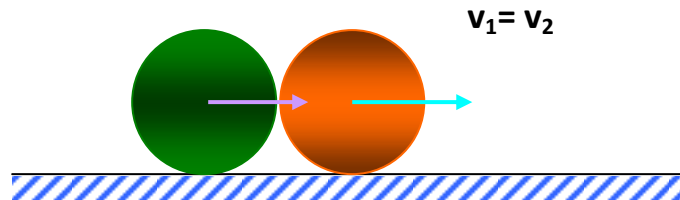
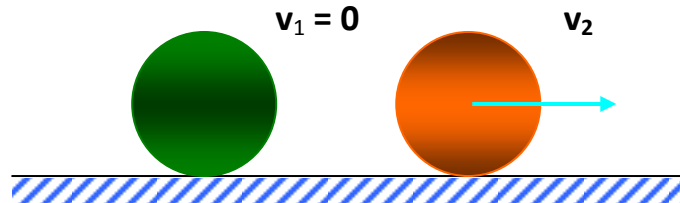
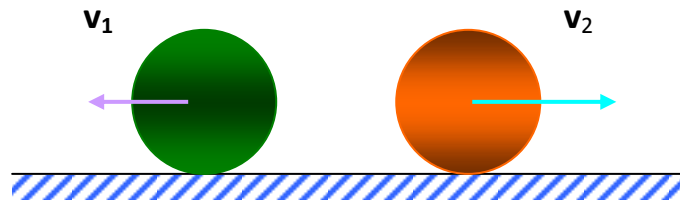
若一個物體要追及另一物體，發生碰撞，總是以下的其中一款：



要碰撞，必須是 $v_1 > v_2$ 。

完成碰撞後(分離)，亦必是以下的其中一款：





碰撞後分離，必須是 $v_1 \leq v_2$

物體 1 撞去物體 2

碰撞前 $v_1 > v_2$

碰撞後 $v_1 \leq v_2$

.....(4)

碰撞過程，基本就是由 $v_1 > v_2$ 變成 $v_1 \leq v_2$

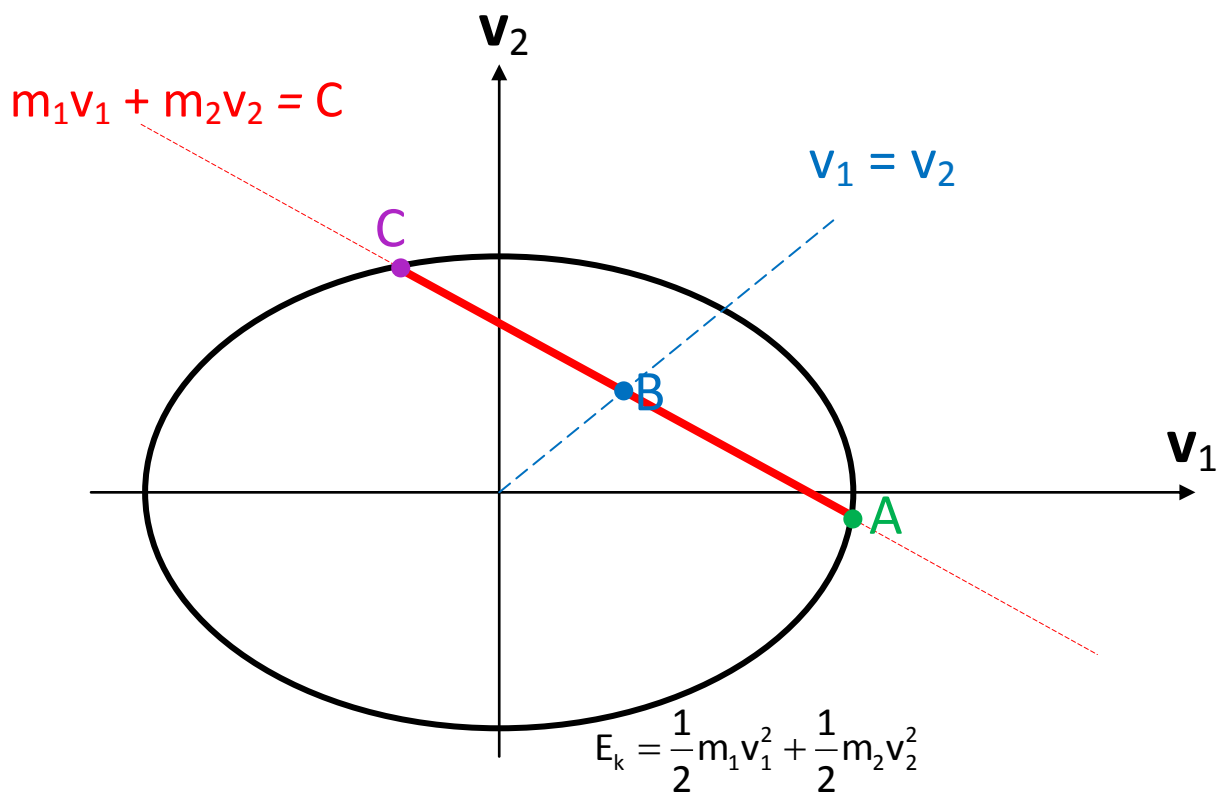
若把

$$m_1v_1 + m_2v_2 = C \quad \text{..... (1)}$$

和

$$E_k = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \quad \text{..... (2)}$$

劃在座標 (v_1, v_2) 上，前者為直線，後者為橢圓形 (ellipse) 。



上圖，

- 在碰撞的任何時刻，動量必守恆，故在任何時刻， (v_1, v_2) 必在紅(實)線上。
- 點 B 是紅線上的 $v_1 = v_2$ 。
- 在碰撞(1 撞向 2) 中， $v_1 > v_2$ 轉化為 $v_1 \leq v_2$ 。所以碰撞就是從

B 的右方紅線轉入 B 的左方紅線(包括 B)。

- 碰撞前的總動能為 E_k ，故點 A 是剛發生碰撞時的 (v_1, v_2) 。
- 若是完全彈性碰撞，那點 C 就是最後它們分離時的 (v_1, v_2) 。

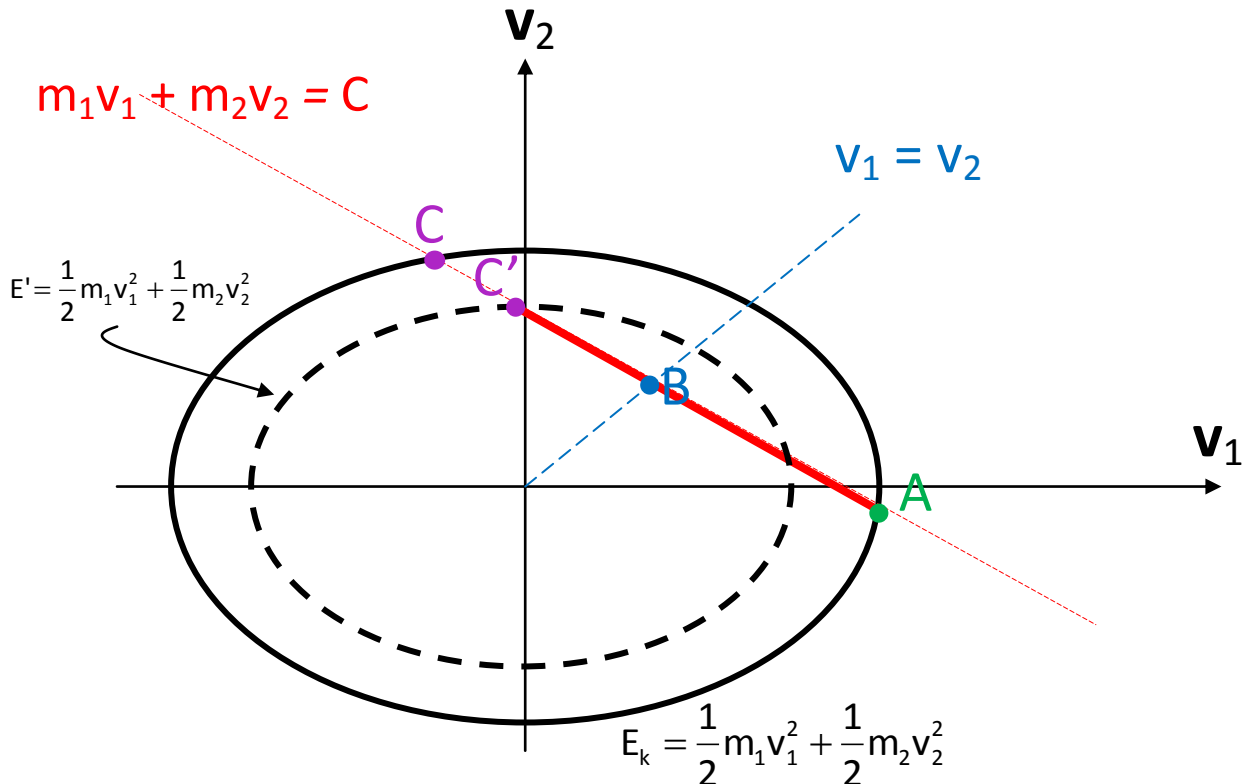
若是完全彈性碰撞， (v_1, v_2) 從點 A 開始，沿紅線上，經過點 B，然後到達點 C，那就完成了碰撞。

- 若是非彈性碰撞，那兩球的 KE 損耗了。設

$$E' = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \quad \text{其中 } E' \text{ 為分離時總 KE, } E' < E_k$$

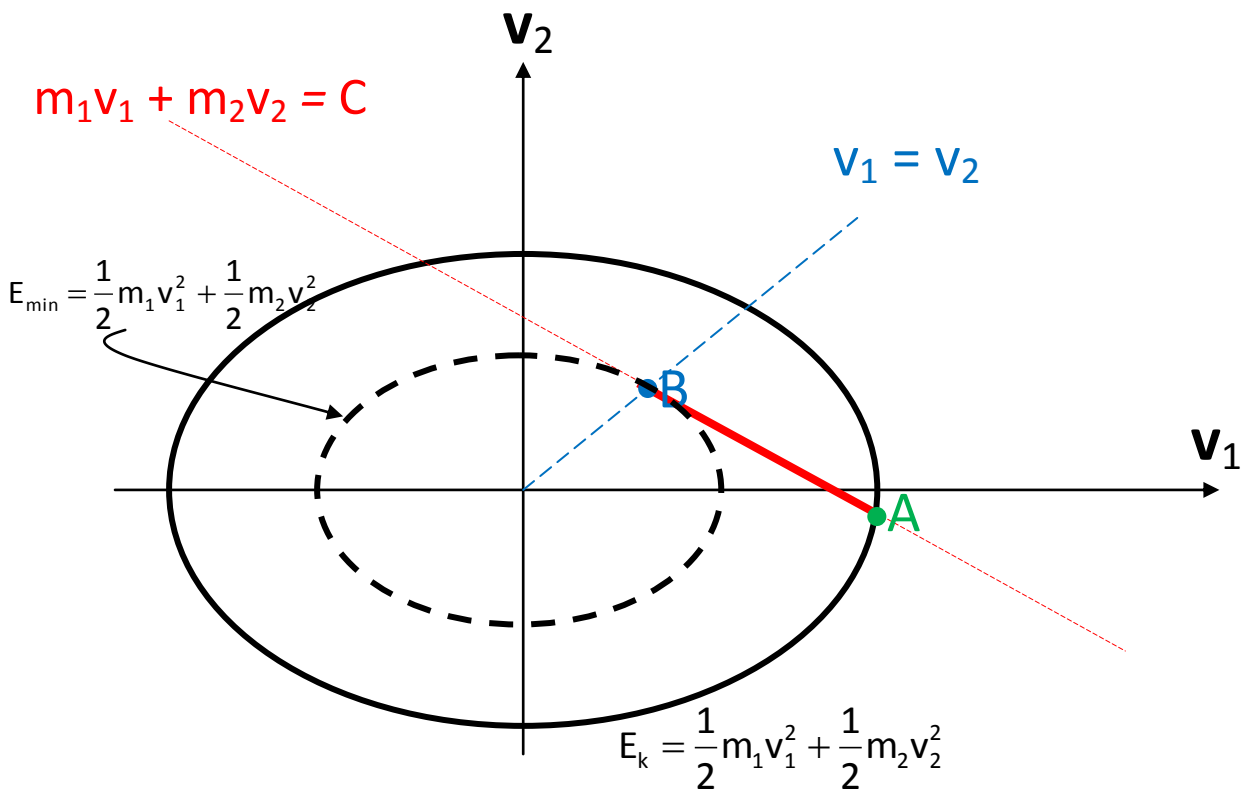
橢圓形的兩截距分別是 $\sqrt{\frac{2E'}{m_1}}$ 和 $\sqrt{\frac{2E'}{m_2}}$ 。

隨著 E' 減少，橢圓形就以 $(0,0)$ 為中心，形狀不變地縮小。



縮小後的橢圓形與 BC 段的相交點是 C'，即是說碰撞由點 A 開始（原本動能是 E_k ），分離時是點 C'（最後動能是 E' ）。

- E' 的容許最少值 (E_{\min})，那就是把橢圓縮小，但仍可與 BC 段（包括 B）有相交點。用一些數學，就可證明把橢圓縮小，最後離開 BC 段的就是以紅線為橢圓在 B 點 ($v_1=v_2$) 的切線。



紅線的斜率 (slope) = $-\frac{m_1}{m_2}$

把公式 $E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$ 兩邊對 v_1 微分，求得

$$\frac{dv_2}{dv_1} = -\frac{m_1 v_1}{m_2 v_2}$$

若紅線相切於橢圓，那必為 $v_1 = v_2$ 。

碰撞剛發生時，動能是 E_K ， (v_1, v_2) 是點 A。

然後沿紅線（因動量必須在任何時刻守恆）由 A 走向 B。

在碰撞發生當中，兩物體的動能會轉為其他能量，例如彈性勢能。

在 AB 之間($v_1 > v_2$)，物體未能分離。

在 B($v_1 = v_2$) 和 B 之後($v_1 > v_2$)，碰撞可完成。

若在點 C 分離，即是先前失去的動能可全部變回動能，這是完全彈性碰撞。

若是非彈性碰撞，那先前失去的動能不能全部變回動能，那分離的 (v_1, v_2) 就在 B 與 C 之間的 C' 點。

若分離時的動能為容許的最小值(E_{min})，那必然就在 B
($v_1 = v_2$) 完成了整理碰撞，這就是完全非彈性碰撞。

吳老師 (Chiu-king NG)

物理勿勿理 <http://ngsir.netfirms.com>