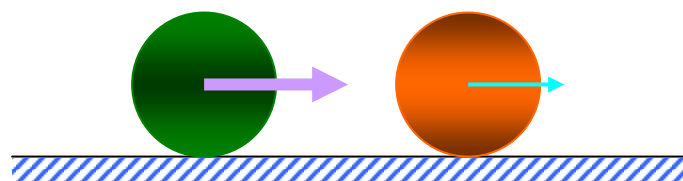


# 證明動能在完全非彈性碰撞損失最大。

兩物體進行正碰撞 (head on collision) :



1. 無論動能(kinetic energy)守恆否，總動量(momentum)必定守恆 (conserved)。

$$m_1v_1 + m_2v_2 = \text{常數 } C \dots\dots\dots(1)$$

當動能(大約)守恆，碰撞稱為「彈性碰撞」(elastic collision)；動能百分守恆的，就稱為「完全彈性碰撞」(completely elastic collision)；動能不守恆的，碰撞稱為「非彈性碰撞」(inelastic collision)，其中不守恆得最厲害的，就稱為「完全非彈性碰撞」(completely inelastic collision)。

當兩物體碰撞後速度相同，此碰撞就是完全非彈性，亦即是在動量守恆的規範下動能損失最多的情況。

## 2. 直接數學證明：

兩物體總動能  $E_k = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$  .....(2)

把 (1) 代入 (2) , 消去  $v_2$  ,

$$2E_k = m_1v_1^2 + m_2\left(\frac{C - m_1v_1}{m_2}\right)^2$$

整理後，得

$$2E_k = \frac{m_1}{m_2}(m_1 + m_2)v_1^2 - 2C\left(\frac{m_1}{m_2}\right)v_1 + \frac{C^2}{m_2} \text{ ..... (3)}$$

我們知道當  $x = -\frac{b}{2a}$  , 二次函數  $ax^2 + bx + c$  ( $a > 0$ ) 的值最小。

從 (3) , 得當  $v_1 = \frac{C}{m_1 + m_2}$  ,  $E_k$  最小。

代  $v_1 = \frac{C}{m_1 + m_2}$  入(1) , 亦得  $v_2 = \frac{C}{m_1 + m_2}$  。即  $v_1 = v_2 = \frac{C}{m_1 + m_2}$  的時 ,

總動能最小。

## 3. 另一有趣(較深)數學證明和有關討論：

動量守恆：

$$\text{因為 } m_1v_1 + m_2v_2 = \text{常數 } C$$

$$m_1\delta v_1 + m_2\delta v_2 = 0$$

$$\text{即 } m_1\delta v_1 = -m_2\delta v_2 \quad (5)$$

動能  $E_k = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$

$$\begin{aligned}\delta E_k &= m_1v_1\delta v_1 + m_2v_2\delta v_2 \\ &= (m_1\delta v_1)v_1 + (m_2\delta v_2)v_2\end{aligned}$$

利用 (5)，得

$$\delta E_k = m_1\delta v_1(v_1 - v_2) \quad (6)$$

兩個物體中，我們選擇速度較高的為  $m_1$ 。

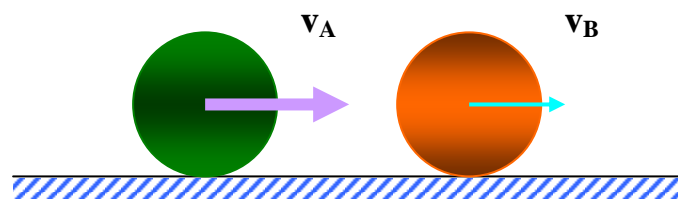
故式 (6) 的  $v_1 - v_2 > 0$  (注意，我們比較的是速度，不是速率)，

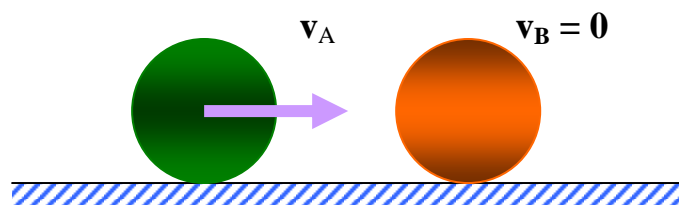
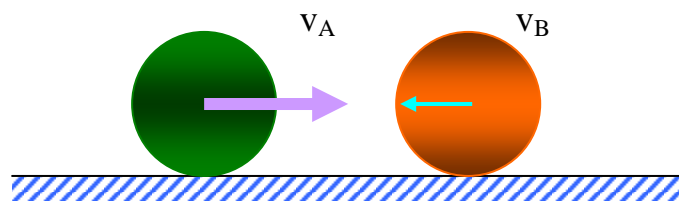
因此當  $\delta v_1 > 0$ ， $\delta E_k > 0$ ；當  $\delta v_1 < 0$ ， $\delta E_k < 0$ 。

即是說

兩物體中較高速度一個因它們之間的互相作用而增加了速度，這系統的總動能必是增加；反之，原速度較高的減少了速度，這系統的總動能必然減少。

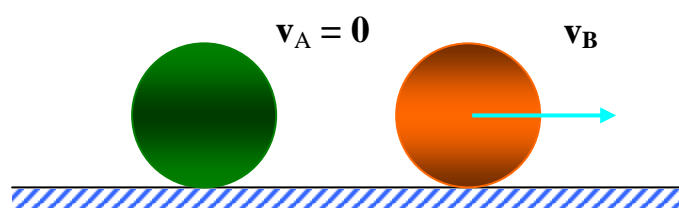
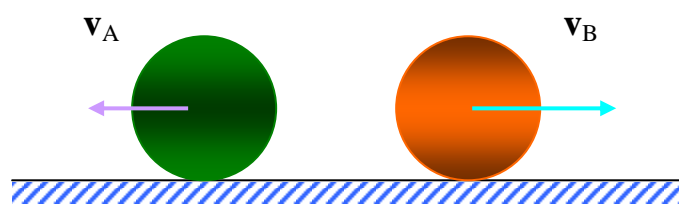
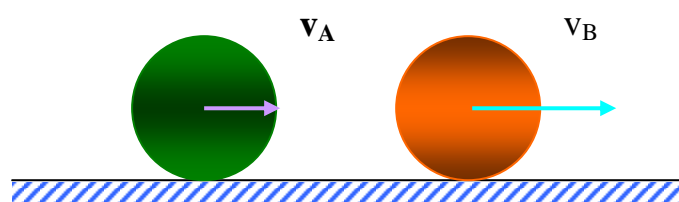
回到碰撞的討論。若一個物體要追及另一物體，發生碰撞，總是以下的其中一款：

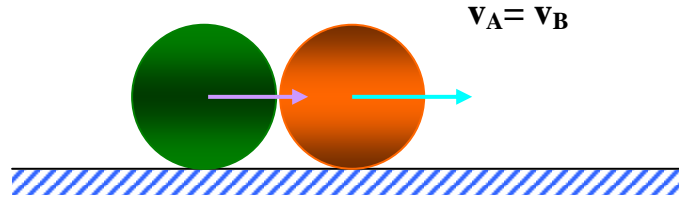




以上各款均是 A 的速度為較高 (向右為正，向左為負)

完成碰撞後(分離)，亦必是以下的其中一款：





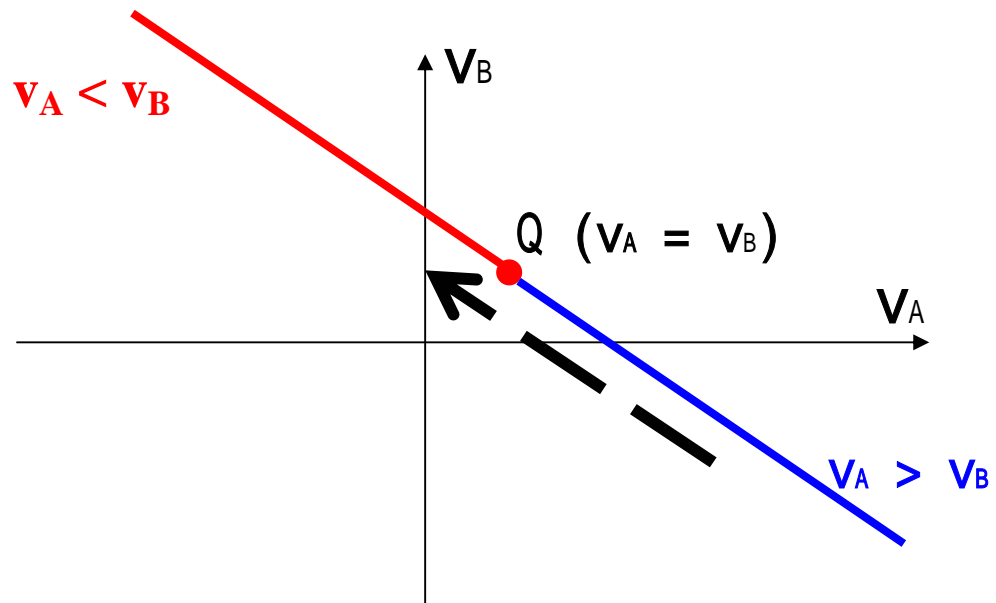
無論哪一款，B 是的速度都是相同或較高於 A 的速度（向右為正，向左為負）。

即是 碰撞前  $v_A > v_B$

碰撞後  $v_A \leq v_B$

碰撞過程，基本就是由  $v_A > v_B$  變成  $v_A \leq v_B$

以圖表表示，



圖中直線上的方程是  $m_1v_1 + m_2v_2 = \text{常數 } C$ ，即代表總動量守恆，所以在碰撞完全非彈性碰撞

任何時刻，兩物體的速度 ( $v_1, v_2$ ) 必須是直線上的點。

藍色線段代表碰撞前各可能位置( $v_a > v_B$ )，紅色線段（包括 Q）則代表各碰撞可能結果。碰撞過程，就是如圖中箭矢所示的方向，由藍色線段的一點走去 Q，然後或再走入紅色線段。

應用本文所述的定理：

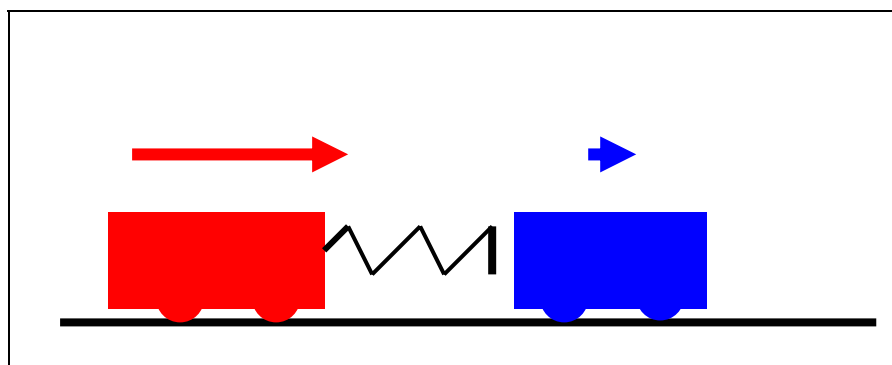
在藍色線段走向 Q 時，較高速度的 A 的速度不斷減少，所以系統的總動能不斷減少著。在 Q 之前，總動能不斷減少。

在 Q 之後，較高速度的是被撞的 B。若繼續沿紅線往上走，較高速的 B 仍然增加著速度，是故系統的動能不斷增加著。

在容許的碰撞結果，動能最少的，就是 Q，即是兩個物體有相同的速度。

#### 4. 一個非數學補充

想像兩小車相撞，它們之間安裝一彈簧。



要發生碰撞，紅車必先要追及藍車。在剛兩車接觸，紅車速度  $>$  藍車速度，所以彈簧長度不斷壓縮。彈簧的勢能增加，即是兩小車的總動能不斷減少（總機械能守恆）。

紅車受到向後的力作用，所以紅車減速；藍車受向前的力作用，所以藍車加速。若仍然是紅車速度  $>$  藍車速度，紅車繼續減速，藍車繼續加速，最後必然變成紅車速度  $<$  藍車速度，起碼也是紅車速度  $=$  藍車速度（譬如兩車扣在一起）。

在轉為紅車速度  $<$  藍車速度階段時，彈簧長度增加，即是彈簧勢能減少，小車的總動能不斷增加。

在容許的碰撞結果，要動能最少的，就是紅車速度  $=$  藍車速度，那就是「完全非彈性碰撞」。

**吳老師 (Chiu-king NG)**