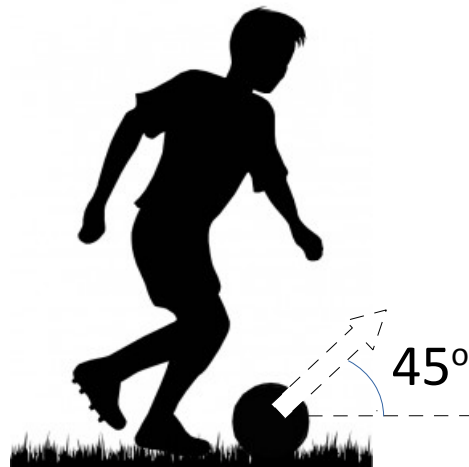


我們經常聽到這樣說：把物件向空中拋出，當拋射角度是 45° ，其射程最遠。

事實是，只當由地面向空中發射，落回地面 (例如人躺臥在地上拋射)。以上說法才成立。



設

發射初速 $\vec{u}$,

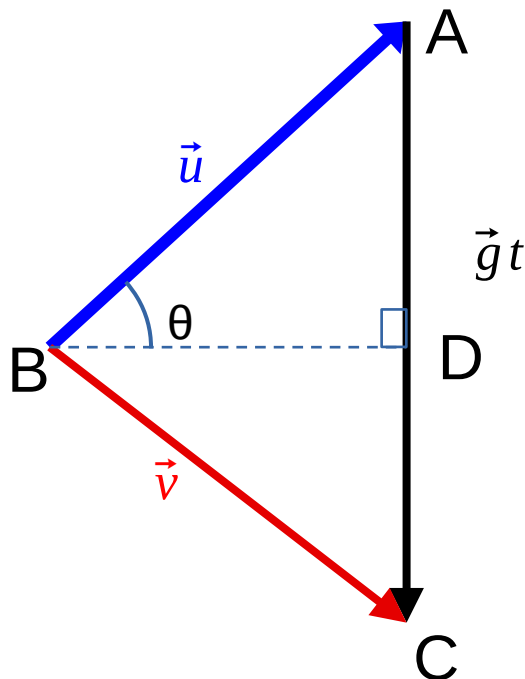
發射方向與水平成角度 θ ,

物件落地時速度 $\vec{v}$ 和全程時間 t 。

在空中，物件只受向下的引力加速 g 所影響，所以

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{g}t \quad (1)$$

用矢量表示式 (1)



$$\Delta ABC \text{ 的面積} = \frac{1}{2}(AC)(BD) = \frac{1}{2}(gt)(u \cos \theta) \quad (2)$$

$u \cos \theta$ ，即是初速 $\vec{u}$ 的水平量值， $u_x = u \cos \theta$

所以，

$$\Delta ABC \text{ 的面積} = \frac{1}{2}g(u \cos \theta)(t) = \frac{1}{2}g(u_x t)$$

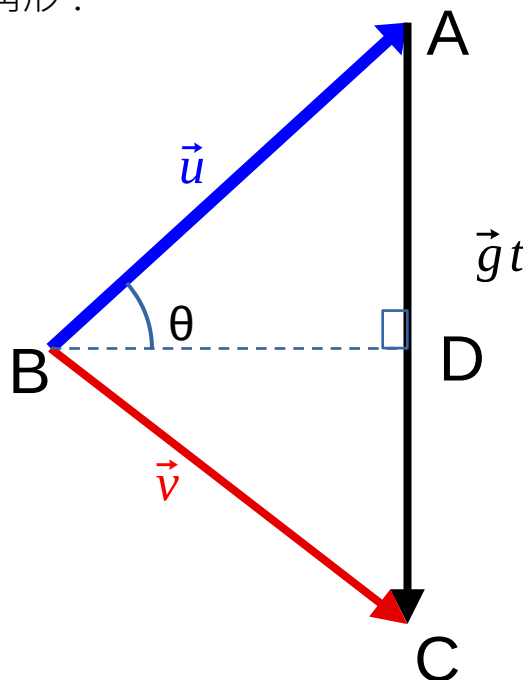
其中 $u_x t$ 就是射程 R 。

$\therefore$

$$\Delta ABC \text{ 的面積} = \frac{1}{2}gR$$

g 是常數，當 ΔABC 有最大的面積，射程 R 就會最大。

再顯示以上三角形：



(1) 發射初速的量值 (magnitude) u 是固定的 (本問題就是在固定

u 之下用甚麼角度射程最遠)。

(2) 落地時速度的量值 v 也是固定的。根據 能量守恆，在某一高

度射向另一高度，無論路徑如何，到達時速度的量值總是一樣。

$\triangle ABC$ 的面積的另一計法是

$$\frac{1}{2}(AB)(BC)\sin \angle ABC = \frac{1}{2}uv\sin \angle ABC$$

u 和 v 是固定值，所以要求 $\triangle ABC$ 有最大面積(最遠射程)，即是要

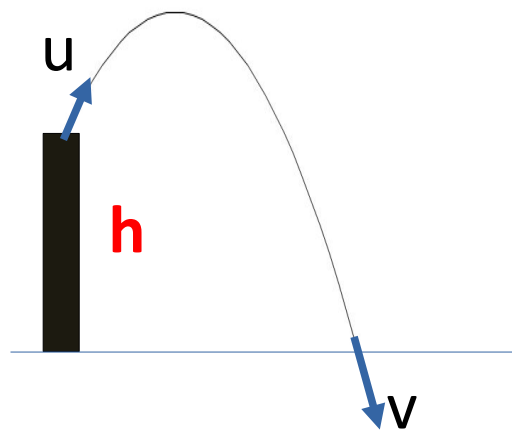
求 $\angle ABC$ 是 90° 。

當落地時速度垂直於發射初速，其射程為最遠

$$\text{當 } \angle ABC = 90^\circ, \angle ACB = \theta, \tan \theta = \frac{u}{v}$$

根據能量守恆， $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mu^2 + mgh$ ，即是

$$v = \sqrt{u^2 + 2gh}$$



結果：出現最遠射程的發射角度是

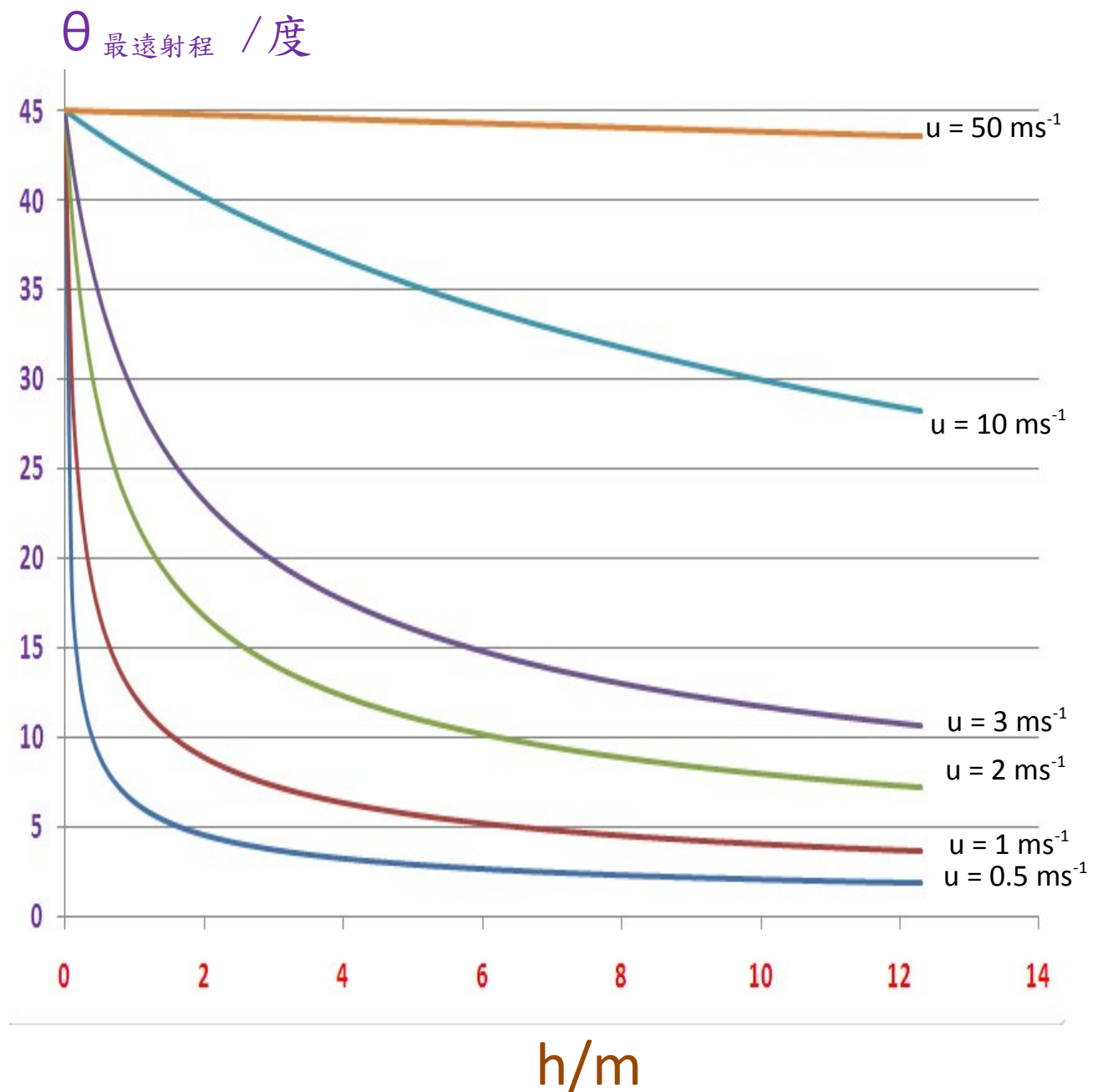
$$\theta_{\text{最遠射程}} = \tan^{-1} \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + 2gh}} \right),$$

最遠射程是

$$R_{\text{最遠}} = \frac{1}{g} uv = \frac{1}{g} u \sqrt{u^2 + 2gh}$$

根據上式， $\theta_{\text{最遠射程}}$ 不是固定，而是由 u 和 h 去決定。

在不同 u 和不同 h 之下的 $\theta_{\text{最遠射程}}$ ：



- 除非 $h = 0$ ，否則 $\theta_{\text{最遠射程}}$ 都是小於 45° 。
- 當初速 u 很大 ($u^2 \gg 2gh$)， $\theta_{\text{最遠射程}}$ 只是略小於 45° 。
- 初速 u 越慢， $\theta_{\text{最遠射程}}$ 就越低於 45° 。
- 舉例，如把東西向外拋出， $h = 1.2 \text{ m}$ ， $u = 4 \text{ ms}^{-1}$ ，那時

$$\theta_{\text{最遠射程}} = 32^\circ。$$

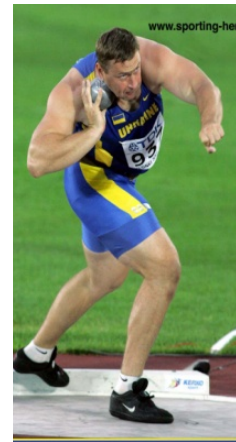
- 因為 $R_{\text{最遠}} = \frac{1}{g} u \sqrt{u^2 + 2gh}$ ，所以就算大家都是相同的 u 和

以 $\theta_{\text{最遠射程}}$ 發射， h 越高， $R_{\text{最遠}}$ 就越遠。

例：

u	h	$\theta_{\text{最遠射程}}$	$R_{\text{最遠}}$
4 ms^{-1}	0	45°	1.6 m
4 ms^{-1}	0.5 m	38.2°	2.1 m
4 ms^{-1}	1.2 m	32.5°	2.6 m
4 ms^{-1}	1.5 m	30.7°	2.8 m

因此，拋鉛球運動是適合大力 (製造大 u)，也要身
高 (h 大) 的人。



註：以上求最大射程的方法源自 W.M.Young, Am. J. Phys. 53, 1(1985)



練習：

1. 一拋物體在地面以 45° 發射，射程為 R 。問以相同初速，在離地
最少 一個甚麼高度把拋物體再發射，其射程可達到 $2R$ ？那時的發

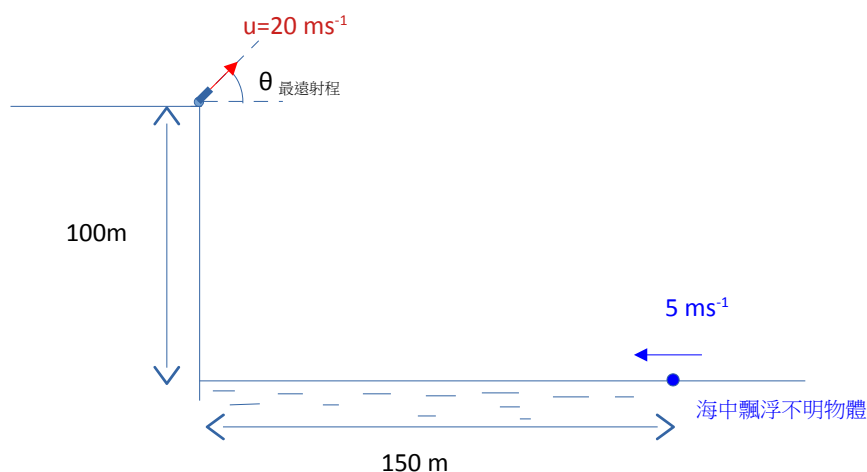
射角應是多少 (取 $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$)？

($h=3R/2, 26.6^\circ$)

2. 証明以 $\theta_{\text{最遠射程}}$ 發射，拋物體在空中的飛行時間為

$$t = \frac{1}{g} \sqrt{2(u^2 + gh)}$$

3.



海面上—不明物體以勻速 5ms^{-1} 飄向—懸崖邊。懸崖上離海面 100m 處有一大炮正準備以初速 $u = 20\text{ms}^{-1}$ ，用可達最遠射程的發射角 θ 把炮彈射出來擊中不明物體。若炮台發現不明物體時它與懸崖邊的距離是 150 m，問在此刻多少時間後發射炮彈正好把不明物體擊中？(取 $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$)

(4.81s)



作者：吳老師 (Chiu-King Ng)

<https://ngsir.netfirms.com>

<http://phy.hk>

電郵：feedbackWZ@phy.hk 其中 WZ 是 23 之後的質數

