海 洋 潮 汐 成 因

甲部是讓讀書對「潮汐」現象有一基本及概括的認識。

乙部是全面地，以定量方法探究引潮力和它如何引起潮汐。乙部的程度約莫是比預科物理稍深一些，需要的物理及數學知識包括萬有引力、圓周運動、向量、壓強 ρgh、餘弦公式、二項式展開和基本微積分等。本文內容大多是前人成果，但也不乏作者對這課題的研習心得，是經考證和參考不少文獻而寫成。

主要公式一覽表

萬有引力	$F = G\frac{Mm}{R^2}$	P. 6
向心力 / 離心力	$F = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$	P.15
每單位質量引潮力一般定義	$\vec{g}_{moon,p} - \vec{g}_{moon,E}$	P.27
每單位質量引潮力的水平分量	$T_h = 3GM_m(\frac{R_e}{R^3})\sin\theta\cos\theta$	P.29
每單位質量引潮力的垂直分量	$T_v = GM_m(\frac{R_e}{R^3})(3\cos^2\theta - 1)$	P.30
正面向/背向月球每單位質量垂直引潮力	$2GM_m \ (\frac{R_e}{R^3})$	P.4 P.25
潮漲水位上升估算	$\Delta h = T_h\ L/g$	P.34
在緯度θ最高潮漲水位（相對最低潮）	$\Delta h(\theta) = \frac{3}{2}\frac{M_m}{M_e}(\frac{R_e^4}{R^3})\cos^2\theta$	P.37
在緯度θ最高潮漲水位（相對平衡）	$h(\theta) = \frac{1}{2}\frac{M_m}{M_e}(\frac{R_e^4}{R^3})(3\cos^2\theta - 1)$	P.37

甲　部

1. 前　言

海洋潮汐、一個大家熟悉的自然現象。簡單來說，

- 它由萬有引力引起。
- 月球和太陽的引力都會引起海洋潮汐，但月球的影響較大。

  當月球、地球和太陽成直線時出現大潮。 在其他時候，太陽和月球的影響部份抵消，所以潮汐幅度較小。
- 一天出現兩次漲潮。

以月球引起的潮汐為例，其引力在地球面向(下圖 A)和背向它(B)兩處地方都造成潮漲。因為地球自轉，地面每地方在一天之內都會有面向和背向月球兩時候 ，所以每天出現兩次漲潮。

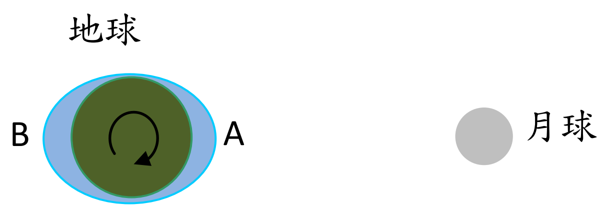


圖 1.1

書本和網上對潮汐已有很大量的描述和討論，例如以下圖 1.2 和公式 1.1 常出現在這些討論。

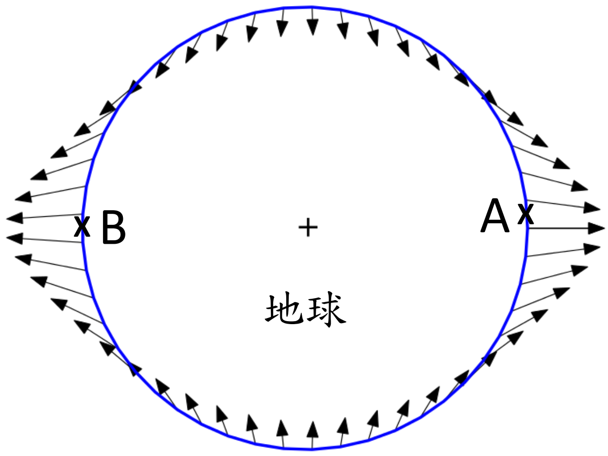


圖 1.2 （來自 http://en.wikipedia.org/wiki/Tide)

圖 1.2 顯示引潮力 (tide-generating force，tidal force) 的分布。若潮汐是由月球引起，圖上 A 和 B 就是正面向和正背向月球兩地方。在該兩處施於每單位質量的引潮力是垂直向上及數值

$$2GM_m \ (\frac{R_e}{R^3}) \qquad \ldots\ldots \quad (1.1)$$

其中 G 是引力常數、M_m 是月球的質量、R_e 是地球半徑、R 是地球與月球之間的距離。在第 4 章， 我們會推導這式。從式 1.1 計算出的數值是 10^{-6} Nkg^{-1}，亦即是地球引力加速度 ($g = 9.81\ ms^{-2}$) 的千萬份之一 ($1/10^7$) 。 一個很重要，且基本問題是如斯微弱的引潮力如何能夠抗衡海水自己的重量而引起潮漲？ 不少海洋學 (oceanography) 論著對這已有合理解釋：潮漲其實是由引潮力的水平分量 (horizontal component)，而不是由其垂直分量 (vertical component) 引起 [註：這個 「水平」即是地球表面的「切向」(tangential) ，「垂直」即是「徑向」(radial)]。以式 1.1 的引潮力

把海水垂直拉起而造成潮漲 — 這圖像是錯的， 因為引潮力實在太微弱。本文希望通過一個較詳盡的定量分析來闡釋這觀點。物理方面，我們會採用 「力」、 「壓強」， 而不用「功 (work)」和「勢 (potential)」，以更能揭示潮汐的發生機制。

本文主要討論引潮力如何引起潮汐這基本問題，而不是潮漲和潮退的規律。 本文亦只討論平衡潮汐 (equilibrium tide) ，即是海水常保持平衡靜止。這等同假設地球沒有陸地和自轉、水是不可壓縮和沒有黏滯性。這平衡潮汐理論早在牛頓的 Principia (1687) 已提出。 我們亦假設地球是不可變形的剛體，即是忽略固體地球潮汐 (solid earth tides)。

本文是以月球引起的潮汐為討論對象。 在物理上，太陽引起的潮汐與月球引起的沒有分別。

2. 相關物理基礎知識

2.1 萬有引力

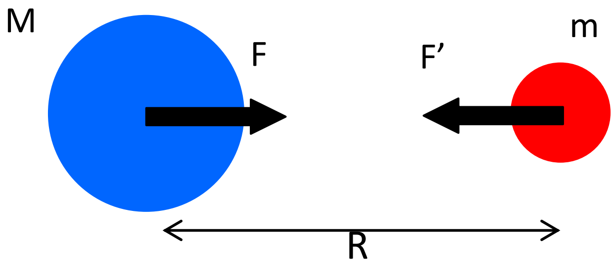


圖 2.1.1

兩球體中心相距 R，質量分別是 M 和 m。它們互施對方萬有(吸)引力

$$F = G\frac{Mm}{R^2} \qquad (2.1.1)$$

其中 G 是引力常數 ($6.67 \times 10^{-11}\ m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}$)。上圖 F 和 F’ 是牛頓第三定律所說的作用力及反作用力。

2.2 地球與月球繞質心旋轉

地球和太陽之間互施對方萬有引力、月球和地球之間也互施對方萬有引力 …為甚麼這些天體不會相撞在一起？ 道理是天上物體「用」了這萬有引力於軌道運行。

筆者網頁的這個電腦模擬或有助了解 https ://ngsir.netfirms.com/chinesehtm/Motion.htm

月球繞地球是一個橢圓軌跡。為了把問題簡化，我們把月球繞地球這個不太扁的橢圓軌跡看成圓形。月球受了地球的引力作圓周運動，但地球受了月球的引力就可以靜止嗎？ 不可以。地球受了月球的引力，也一樣要進行圓周運行來「用去」這力， 情況就如一位鏈球運動員轉動鏈球。

鏈球(月球) 轉動時，運動員(地球) 也一起跟著「轉」。

但地—月的互繞轉動 與 鏈球—運動員的互繞轉動有一個基本分別，是地球不會像鏈球運動員那般轉動整個身軀。 我們須把事情說清楚。

月球繞地球轉動，同時地球也繞著月球轉動。正確的說法是月球和地球都繞著它們的質心 (centre of mass) 旋轉。天文學稱此點為 barycentre。

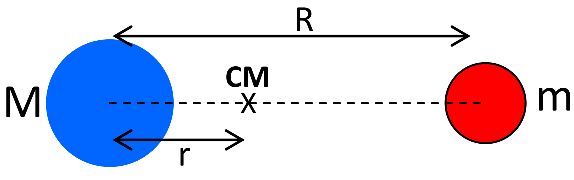


圖 2.2.1

質心 (CM) 的位置在兩球體中心連線之上並距離 M, $r=\frac{mR}{M+m}$ 。

地球質量 $M_e = 5.98 \times 10^{24}$ kg，月球質量 $M_m = 7.36 \times 10^{22}$ kg，

地球—月球距離 $R = 3.88 \times 10^{8}$ m。

所以 CM 與地心的距離是 $r=\frac{7.36\times10^{22}\times3.88\times10^{8}}{5.98\times10^{24}+7.36\times10^{22}}$

$$= 4.72 \times 10^{6}\ \text{m}$$

但地球半徑 $R_e = 6.37 \times 10^{6}$ m，即是 $r <$ 地球半徑。

地球—月球的質心處於地平線下，與地心之距離約是地球半徑之 7/10。

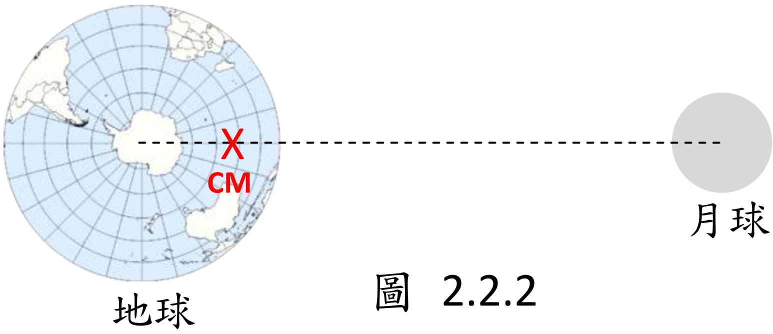


圖 2.2.2

既然地球和月球都是繞著它們的共同質心(CM)轉，那我們問:「地球相對 CM 作甚麼運動？是圓周運動嗎？ 若是，那地表各點作圓周運動的半徑為何？」

以下想法對嗎？

地球繞 CM 轉，正如在一張紙上畫上地球、月球和它們的 CM。 然後用圖釘穿過紙的 CM 並插在木板上，再把整張紙轉動。

（即是上述的「鏈球運動員轉動鏈球」）

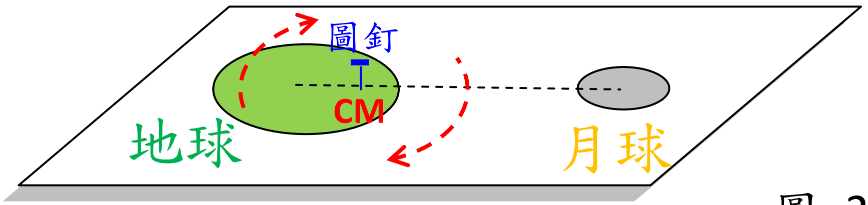


圖 2.2.3

這想法不正確。

如果真是這樣，地球自己也會繞 ×CM 自轉，這個自轉週期是一個月。

以下圖組由左至右代表利用這個錯誤想法的一次轉動。藍色三角是地面的一個標記，大家可以看到當月球繞地球一周時，那藍色標記也同時轉了一圈，即是地球也因此自轉了一次。

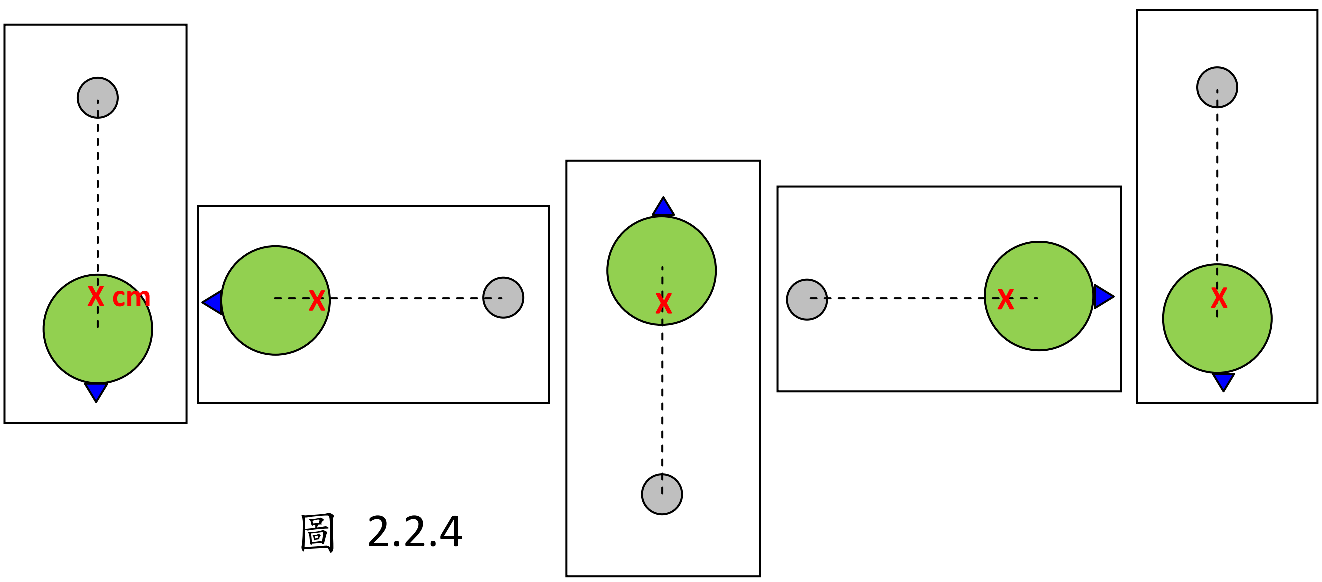
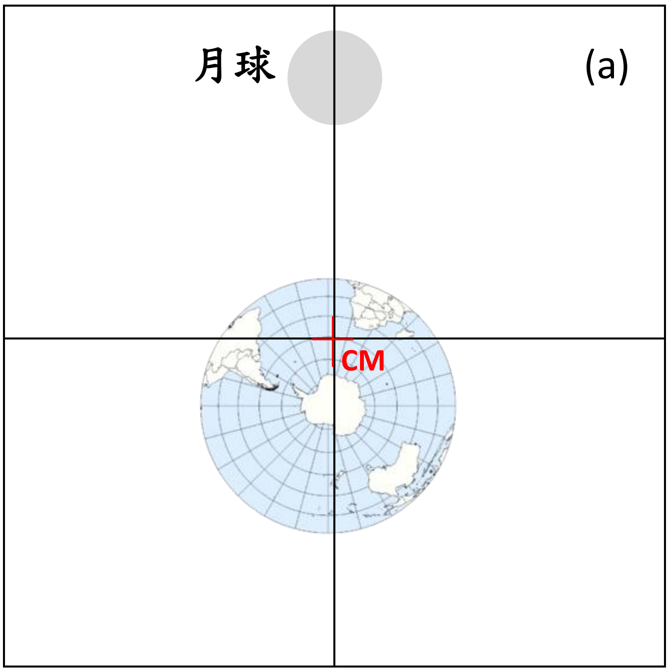
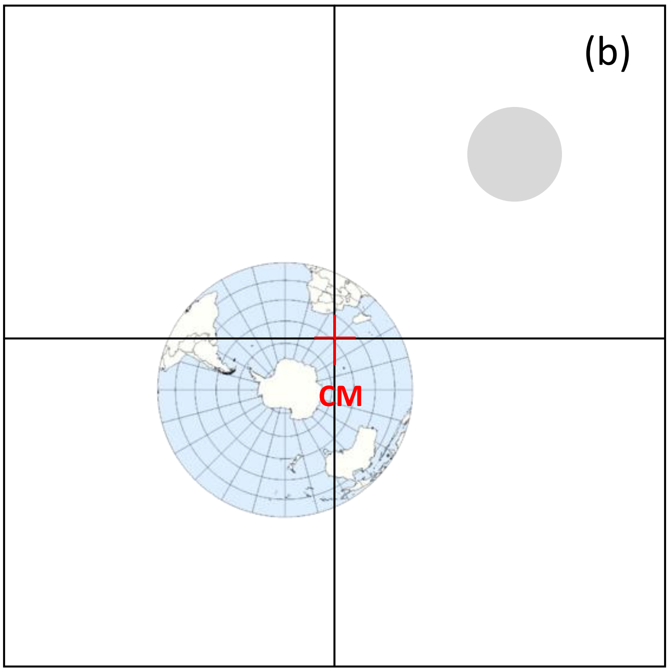


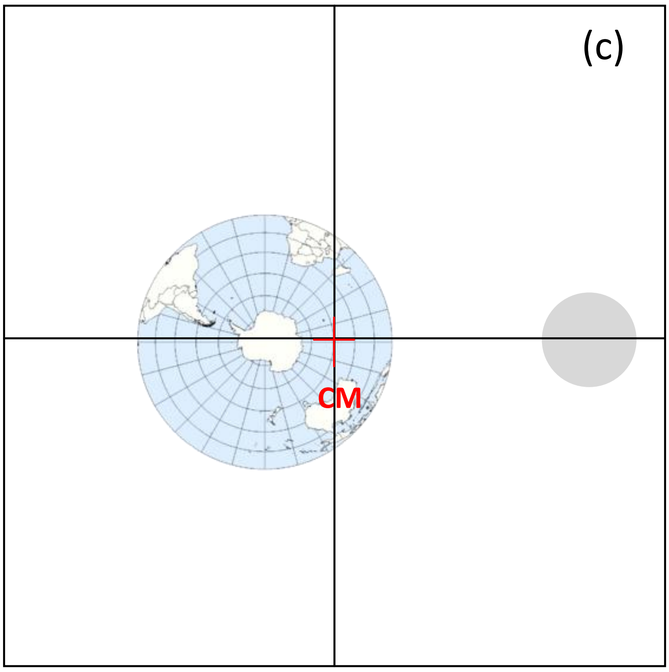
圖 2.2.4

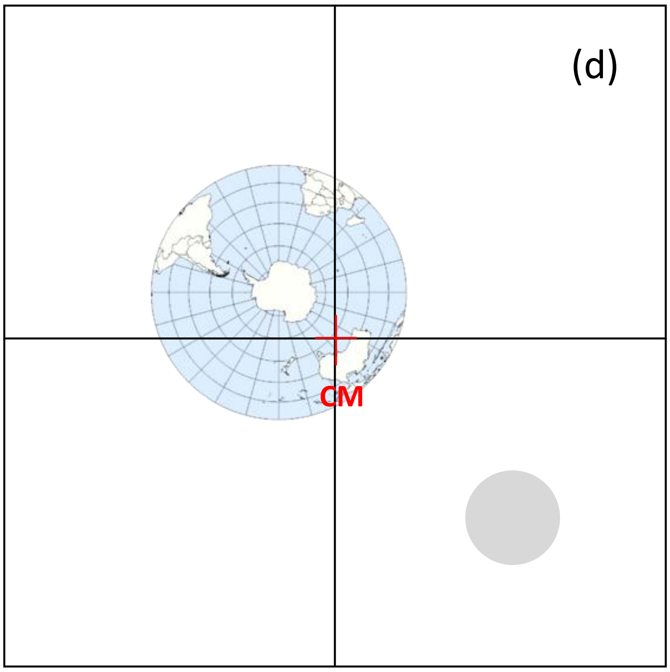
地球當然有自轉，週期是一日。但地球自轉不是因月球繞地球轉動造成。如果上述圖像正確，那地球除了那每日的自轉外，還額外多了一個週期為一個月的自轉。這與事實明顯不符！

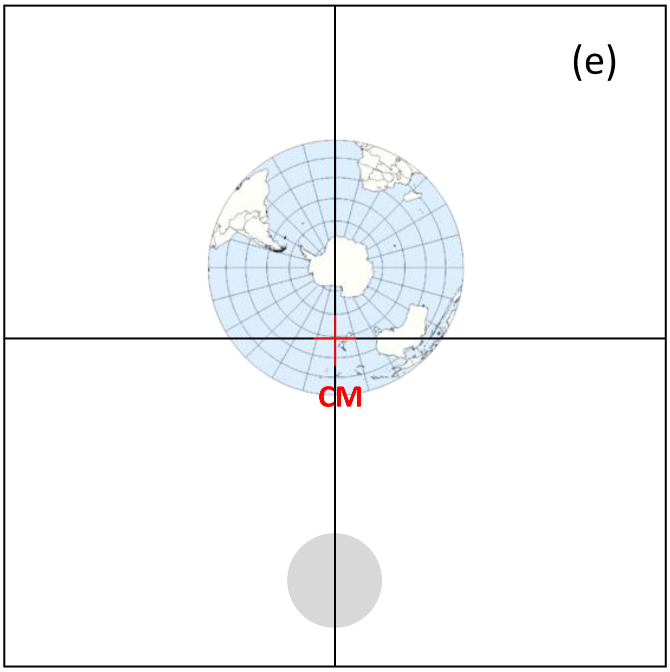
正確的應該是以下 (a) 至 (i) 描繪的那樣。為求清楚及避免產生混淆，圖中刪去地球正常的自轉。

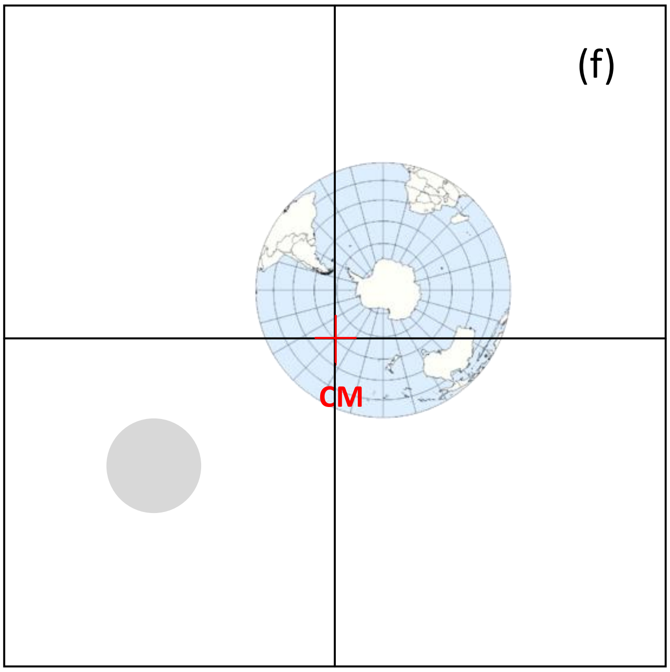


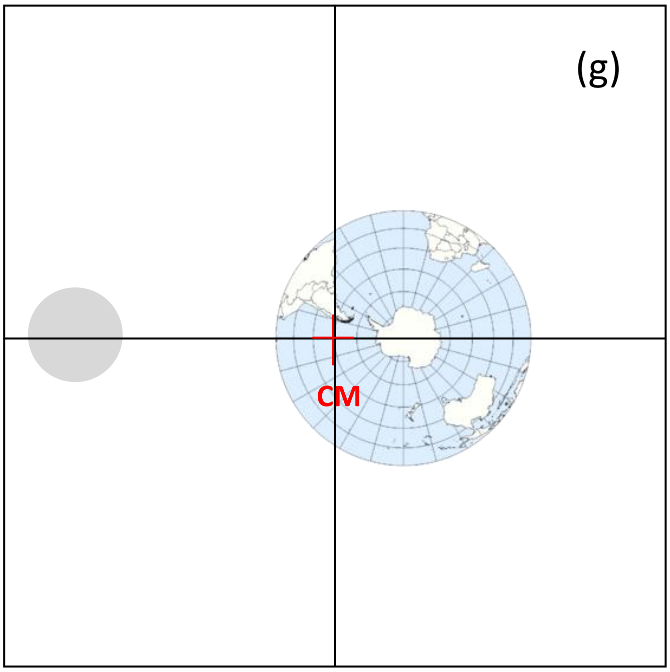


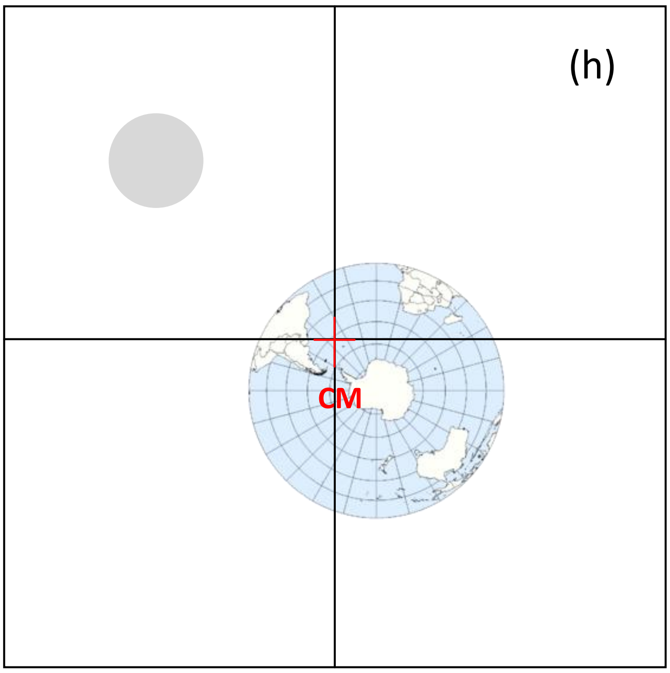

(c)
CM


(d)
CM


(e)
CM


(f)
CM


(g)
CM


(h)
CM

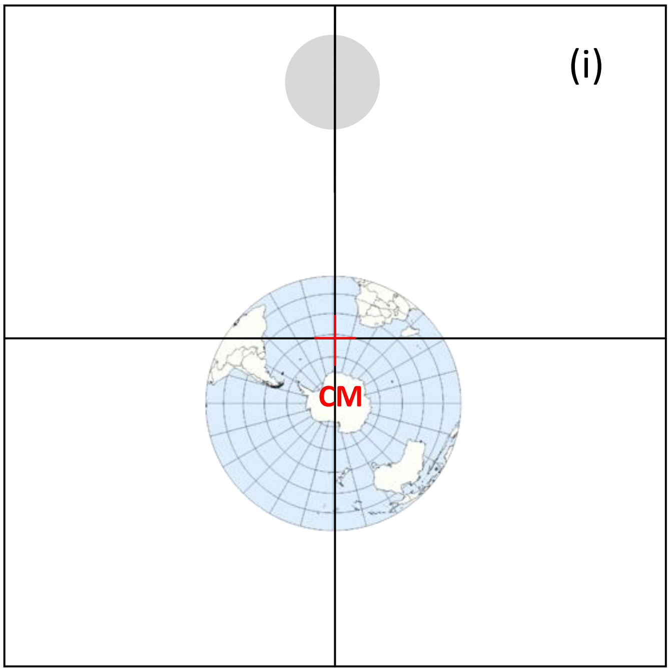
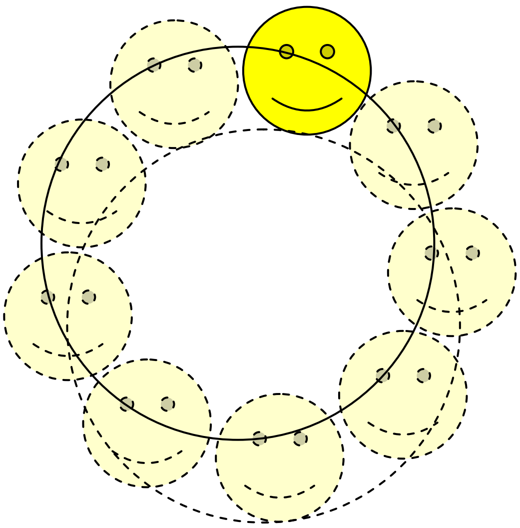


圖 2.2.5

由以上 (a) 至 (i) 各圖，可見地球的繞 CM「轉動」，其實是一個在圓形軌跡上的平移運動 (translational motion on a circle)。



所謂在圓形軌跡上的平移運動，就像☺在固定方向下走了一圈。☺的任何部份都進行完全相同的運動（相同半徑但不重疊的圓形）。

在這個「圓形軌跡上的平移運動」，地球的任何一條直徑會保持方向不變(相對遠處星星)。 在這個運動，正面向月球(下圖 A)、正背向地球（B）和地心（C）都是進行完全相同的圓周運動(半徑相同、周期相同，但圓形不重疊)）。不止這三點，整個地球皆如此。

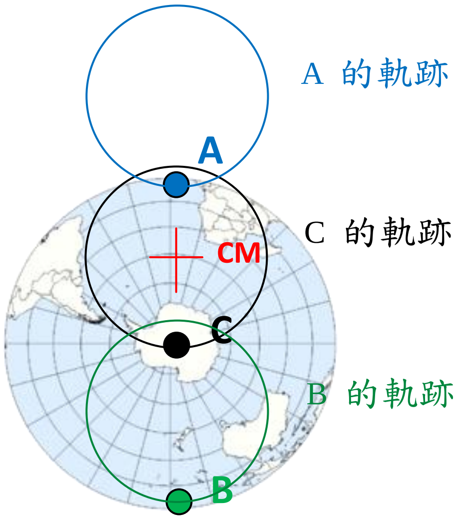


圖 2.2.6

2.3 向心力和離心力

作者曾寫一篇「甚麼是向心力？甚麼是離心力」 http://ngsir.netfirms.com/Q/ME/MQ9.pdf 的文章。 這裡，我們只複述該文的重點。

要物體作圓周運動，它必先受一淨力作用，計算此力的公式是

$$F = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r \qquad \text{............} \qquad (2.3.1)$$

其中 m 是物件的質量、v 是沿周界運動的速率、r 是圓的半徑和 ω 是角速度 (即每秒轉的角度； v = ωr)。式 2.3.1 的 F 就是向心力，不是說圓周運動會產生一個叫做「向心力」的力。而式 2.3.1 告訴我們這樣的一個概念：若你要物質 m ，沿著一個半徑為 r 的周界，以 v 的速度行走，你必先給它一個力才行。這個力可以是引力，可以是電磁力，可以是法向力，可以是摩擦……等等，亦可以是這些力的合力。因為這個力必定指向圓的圓心，我們稱這個製造加速的合力為「向心力」。 這個力應該是甚麼數值，那就是從式 2.3.1 求得的數值

地球和月球繞質心轉動，那地球和月球從那裡獲得它們作這運動時所需的淨力(向心力)。 明顯，所需淨力來自它們相互作用的萬有引力。

甚麼是「離心力」? 簡單而言，「離心力」是一種「慣性力 (inertial force)」、是處於一個轉動參考系統 (rotating frame of reference) 的觀察者在描述運動時須引入的一個假力。 「離心力」的數值和式 2.3.1 相同，但方向是指離圓心。

「向心力」和「離心力」是不同觀察者使用的物理語言。

若從太空遠處的星星望向地球和月球，看見的是 P.10-13 圖 2.2.5 所描繪的運動。 那時，我們會說:「地球和月球繞共同質心運動，地球進行圓周運動所需的淨力(向心力)來自月球的萬有引力。」

但以地球上的觀察者來看，見到是一個靜止的地球。 我們是非慣性觀察者，我們會說： 「地球各物體受到月球的引力被「離心力」 抵消」。 嚴格來說，上述句子的「離心力」應該是指「在各自轉動系統的離心力」， 因為地球如 P.13-14 描述般是進行圓圈上的平移運動，而不是一個純轉動。因為地球各物體繞不同中心作圓周運動，我們只可針對每一物體來定義使該物體變成靜止的轉動系統，那該物體就在那轉動系統受到「離心力」作用。本文使用「離心力」一詞，均是此意，不贅重複。

3. 潮汐的定性解釋

簡單來說，月潮汐的起源是因為月球施於整個地球的引力場不均勻 (Moon’s non-uniform gravitational field)。首先，我們先對潮汐作非數學的定性解釋。

3.1 以「自由落體 (free fall)」解釋

物體放在月球上也一樣有重量。 我們假想進行一個這樣的實驗：

在離月球 1000 km、 2000 km 和 3000 km 的高度分別放三粒石子。一聲令下，三粒石子一齊釋放下跌。 它們之間的距離會否改變（忽略任何阻力）？

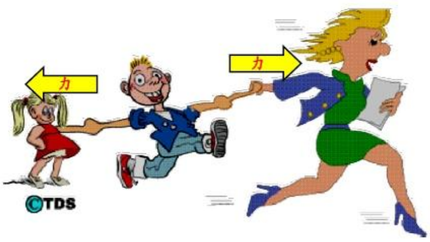
答案是它們之間的距離會增加。 引力是距離的平方反比，三粒石子下跌的引力加速度都不相同。 放在 1000 km 處石子的引力加速度最大、放在 2000 km 處的次之、放在 3000 km 處的則最小。 雖然下跌時加速度亦隨高度減小而增加，但它們的大小次序始終不變。經過同一時段，它們下跌高度的大小排列與加速度的大小排列相同。即是，若以中間的石子觀望，上、下其餘兩粒都會遠它離去。

如在 P.6，章節 2.2 所言，地球繞地—月系統的質心旋轉。而這

圓周運動其實也是一個自由落體 (請參考作者寫的另一文章「如何用初中物理和數學解釋人造衛星繞地球運行的道理？」http://ngsir.netfirms.com/Q/ME/MQ5.pdf)。

想像中間的石子是地球，放在近月球的石子是地球面向月球的海洋；而遠的石子是背向月球的海洋。圓周運動可視為自由落體，而「若以中間的石子觀望，上、下的其餘兩粒都會離它而去」。即是相對地球，面向和背離月球兩處的地球海洋均會「被拉扯離開」，即是在該兩地方發生水位升高—潮漲。

三人手牽手向前跑：最前的人跑得最快，最後的則最慢。中間的人的手有被扯開的感覺。此漫畫來自網站 https://www.yesican-science.ca/



3.2 以「向心力」解釋

在 P. 13-14，我們得到一個重要概念：地球繞地—月系統的質心作圓周運動， 整個地球皆作完全相同的圓周運動(相同半徑、相同周期、圓圈不重疊）。而這些圓周運動所需的向心力（見 P.15）就是來自月球的引力。 相同的圓周運動，但與月球的距離不一樣而令引力不同，這就成就了潮汐的發生。

當地球繞著地月質心轉動時，地心(C)、正面向月球(A)和正背向月球(B)都是進行完全相同的圓周運動(半徑相同， ω 相同)。 各圓心在不同位置，但都處於地心與月心的連線上(見下圖)。

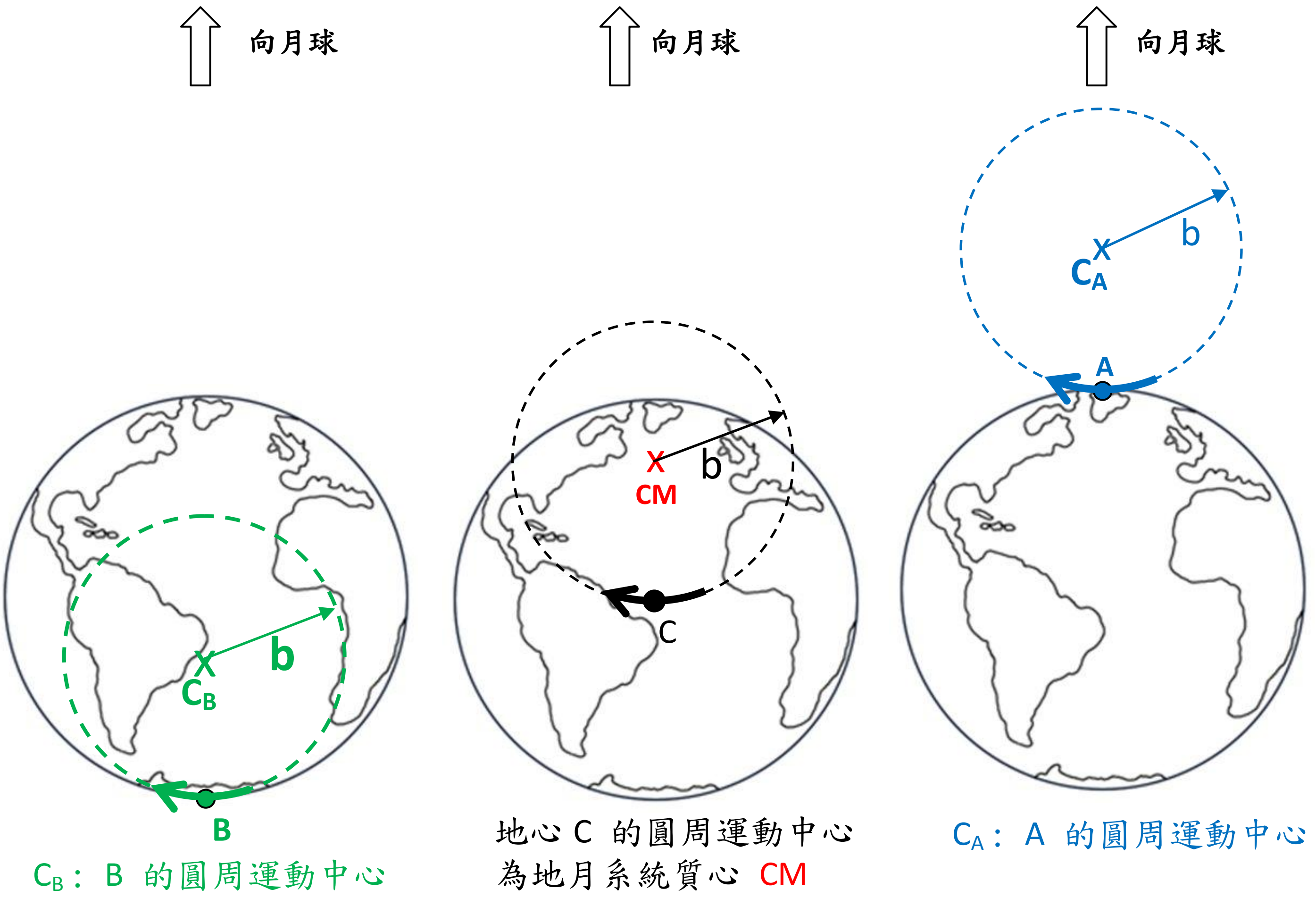


圖 3.2.1

地球繞著地—月系統的質心旋轉，這是事實。所以地球受到的月球引力必定是「剛好」作為這圓周運動的向心力。

但是，

對 A 而言，實際取得的引力大於所需的向心力。

對 B 而言，實際取得的引力小於所需的向心力。

在 A，物體實際取得的引力大於所需的向心力。過 大 的 力 會 造 成 轉 彎 過 了 頭。 即是放在 A 處的物體會(企圖) 行比地面 A 的軌跡 (半徑為 b 的圓周運動)更彎曲的軌跡。

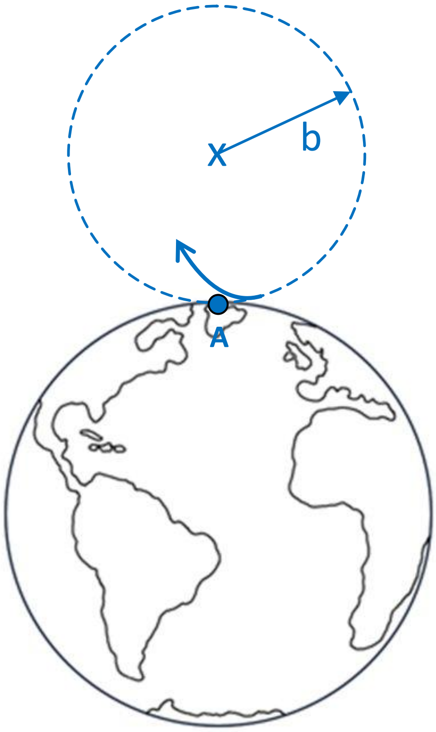


圖 3.2.2

即是在那處的物體會企圖升高離開地面。

在 B，物體實際取得的引力小於所需的向心力。牛頓第一定律說物體如不受力會行直線。不 足 夠 的 力 就 會 行 了 較 直 的 軌 跡。即是放在 B 處的物體會(企圖) 行比地面 B 的軌跡 (半徑為 b 的圓周運動) 為直的軌跡。

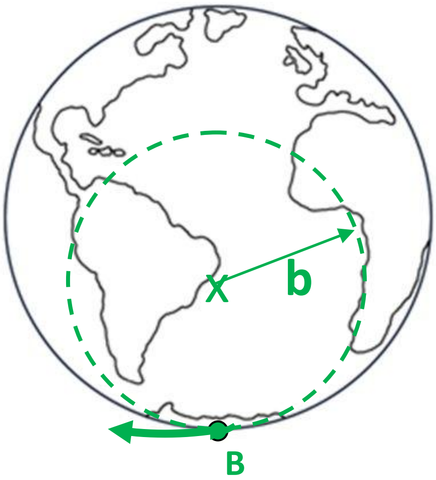


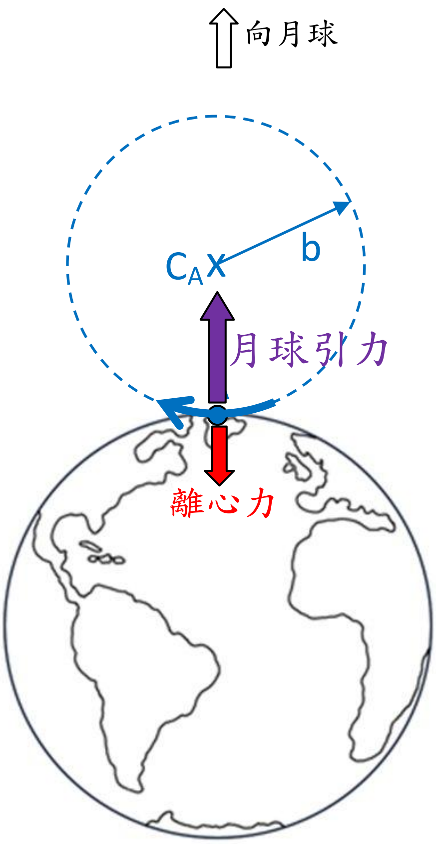
圖 3.2.3

即是在那處的物體會企圖升高離開地面。

若把水放在 A 和 B 兩地方，水就會企圖被提升離開地面。這就是面向和背向月球有兩個潮漲的原因。上述用了「企圖」二字，因為物體的重量會把它拉回來。

3.3 以「離心力」解釋

地球居民看不見地球在章節 2.2 所描繪的那樣運動，但地球居民會「感覺」因這運動而產生的「離心力」（如在急轉彎的車上乘客。 乘客看不見車在轉彎，但會感覺到「離心力」）。因整個地球皆作相同的圓周運動，所以地球各處的每質量「離心力」皆相同。 這「離心力」雖可免於地球被月球的引力吸了過去，但這 「離心力」對較接近月球的物體就不足以完全抵消月球引力，因為越接近月球，月球引力就越大。



C_A： A 的圓周運動中心

圖 3.3.1

在接近月球地方，引力大於離心力，所以引起潮漲。

一些書本因而這樣說：「面向月球的潮漲是由月球的引力造成」。

反之，這「離心力」對較遠離月球的物體就大於月球引力。

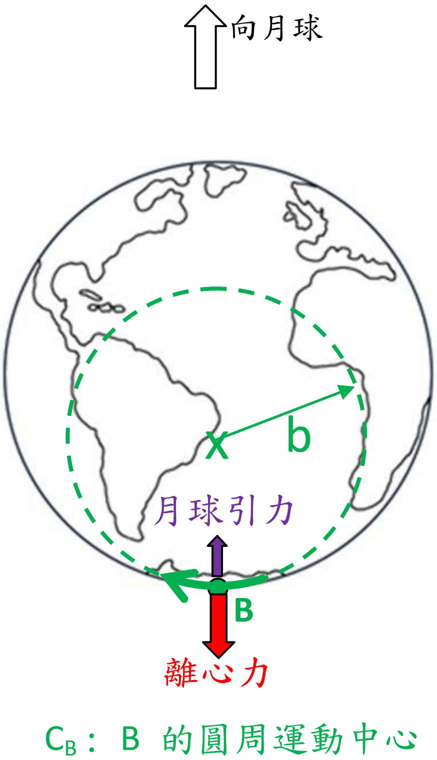


圖 3.3.2

在遠離月球地方，離心力大於引力，所以引起潮漲。

一些書本因而這樣說：「背向月球的潮漲是由離心力造成」。

「面向月球的潮漲是由月球的引力造成；背向月球的潮漲是由離心力造成」 — 這說法被受一些評論詬病，說是一項嚴重的觀念錯誤。

筆者不同意這是「錯誤觀念」，惟這始終由讀者自行判斷。

以「自由落體」、「向心力」和「離心力」來解釋潮汐，都很常見(尤其是「自由落體」和「離心力」)。

以上三種解釋似乎都在說 「海面上有一股“力”把海水拉起，形成潮漲」。 真實的海潮不是如此簡單，我們在乙部會詳細分析。無論如何，以上解釋大概來說是正確的。

乙　部

4. 引潮力推導

4.1 正面向和正背向月球兩處的引潮力

這裡，我們會採用『3.1 以「自由落體 (free fall)」解釋』作為基礎。

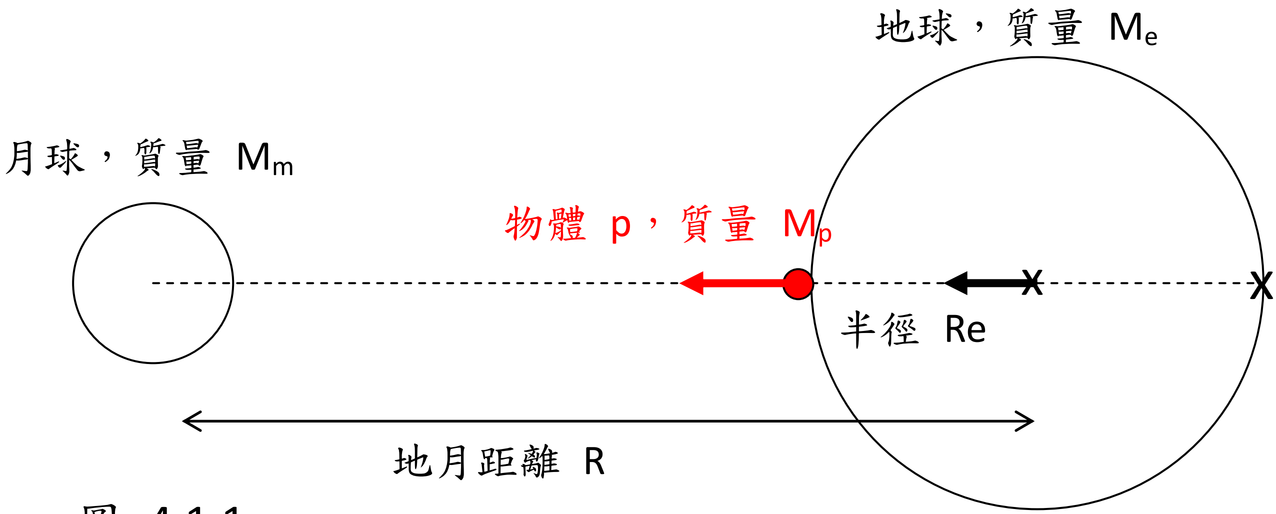


圖 4.1.1

月球施於地球的引力是 $F_e= GM_eM_m/R^2$ ，因而地球獲得加速度(即是地球繞地—月質心轉動的向心加速）$a_e = F_e/M_e= GM_m/R^2$。同樣，圖中紅色物體 p 的加速度是 $a_p = F_p/M_p= GM_m/(R-R_e)^2$。如果從地球觀看 p，看見 p 的加速度是 $a_p - a_e= GM_m/(R-R_e)^2 - GM_m/R^2$。這個相對加速度是正， 即是從地球看到 p 是向著月球走去。若果把 p 搬去正背離月球位置 (上圖 x)，那相對地球 p 的加速度變為 $a_p - a_e= GM_m/(R+R_e)^2 - GM_m/R^2$。 這時，$a_p < a_e$，

相對地球 p 的加速是負數，即是 p 遠離月球而去。 無論如何，兩者都是 p 垂直離開地面。

運用二項式展開，並只保留至 R_e/R 的一階項（∵ $R_e << R$），

$$\therefore \frac{1}{(R \pm R_e)^2} = \frac{1}{R^2}\left(1 \pm \frac{R_e}{R}\right)^{-2} \approx \frac{1}{R^2}\left(1 \mp 2\frac{R_e}{R}\right)$$

所以，最後得到在正面向和正背向月球位置，相對地球 p 的加速度的量值均簡化為 $2GM_m (R_e/R^3)$ 。

因為 $a = F/m$，所以這相對地球的加速度可演繹為在地球看到的每單位質量提升力 (lifting force per unit mass)。

若把 p 換成海水，海水因而被拉起。這就是每單位質量的引潮力 (tide-generating force) ：

$$2GM_m \left(\frac{R_e}{R^3}\right)$$

海水雖然受這引潮力作用，但是否真的被拉起，還要考慮海水自己本身的重量（地球引力）。

代數值：引力常數 $G= 6.67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}，地球半徑 $R_e = 6.37 \times 10^6$ m，月球質量 $M_m= 7.36 \times 10^{22}$ kg 和月球和地球之間距離 $R = 3.88 \times 10^8$ m。我們得每單位質量的引潮力 = 1.1×10^{-6} Nkg^{-1}。若拿它與地球表面引力 $g = 9.81$ N kg^{-1} 比較，比例是 1: 10000000。這比例約莫等於一根火柴 (~ 0.2 克) 與一輛 2 噸小汽車重量之比。

引潮力與地心吸力都與質量正比，即是無論海水多少，潮汐幅度

多大，它們的比例始終維持 1: 10000000。如此微弱的引潮力能克服地心吸力而引起潮汐，這是不可能的。

不少論著已正確指出潮汐的引發是引潮力的水平 (或稱切向)分量 (horizontal component) 造成。在正面向和正背向月球位置，引潮力都沒有水平分量。為了把問題弄清楚，我們須把地球表面任何位置的引潮力找出，這才可以看到它的兩個分量各有甚麼影響。我們會在下一節作這推導。

我們先作一項重要補充。以上的引潮力是

$$\frac{GM_m}{(R \pm R_e)^2} - \frac{GM_m}{R^2} \approx 2GM_m(\frac{R_e}{R^3})$$

式左第一項 $[GM_m/(R \pm R_e)^2]$ 其實就是月球在物體位置的引力強度 (moon's g-field)，而式左第二項 (GM_m/R^2) 是月球在地球中心的引力強度。

如果全避開「向心力」和「離心力」這些艱深說法，簡單而言，

在地球表面某處的每單位質量引潮力 = 月球在該處的引力 - 月球在地球中心的引力。

一般，這兩個引力方向不平行，所以上式的代數減須改為矢量減 (vector subtraction) 。

4.2 在地球表面任何位置的引潮力

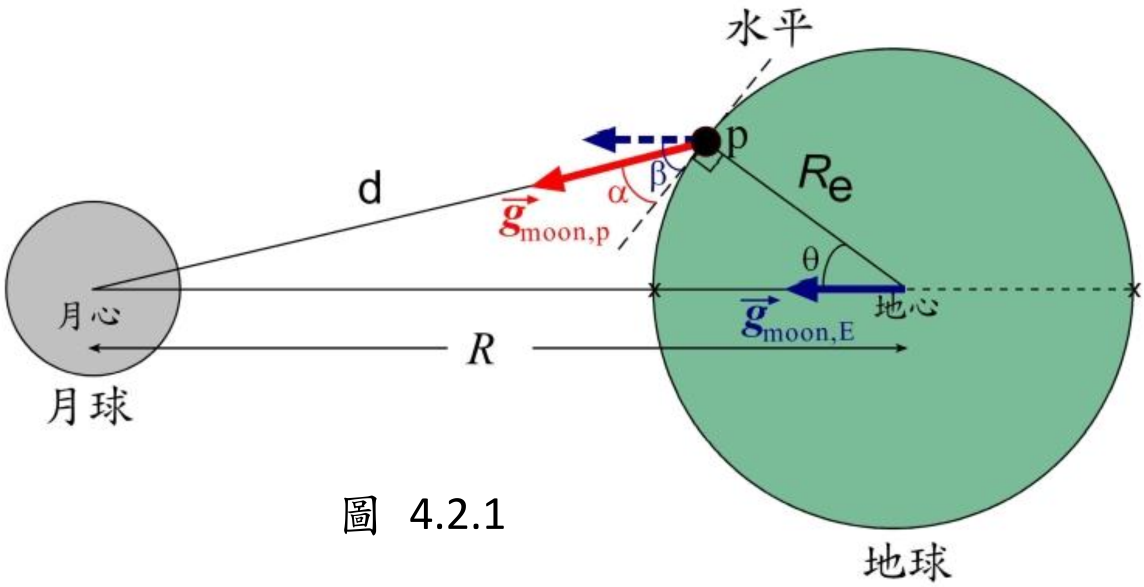


圖 4.2.1

把 p 放在地球表面任何位置 (以角 θ 為參數， 每單位質量引潮力 =

$$\vec{g}_{moon,p} - \vec{g}_{moon,E}$$

其中 $\vec{g}_{moon,p}$ 是月球在 p 所處位置的引力強度，而 $\vec{g}_{moon,E}$ 是月球在地球中心的引力強度。 它們數值分別是 GM_m/d^2 和 GM_m/R^2，方向是指向月球中心。我們把 $\vec{g}_{moon,E}$ 平移往 p 的位置，並如圖中引入角 α 和 β。

每單位質量引潮力的水平 (或稱切向) 分量 (T_h) =

$$GM_m\left(\frac{\cos\alpha}{d^2} - \frac{\cos\beta}{R^2}\right)$$

每單位質量引潮力的垂直（或稱徑向）分量（T_v）=

$$GM_m\left(\frac{\sin\alpha}{d^2}-\frac{\sin\beta}{R^2}\right)$$

簡化以上兩式，僅需要一點高中數學。我們要做的是把 d、α 和 β 以 R、R_e 和θ表示，然後用二項式展開並保留至 R_e/R 的一階項。

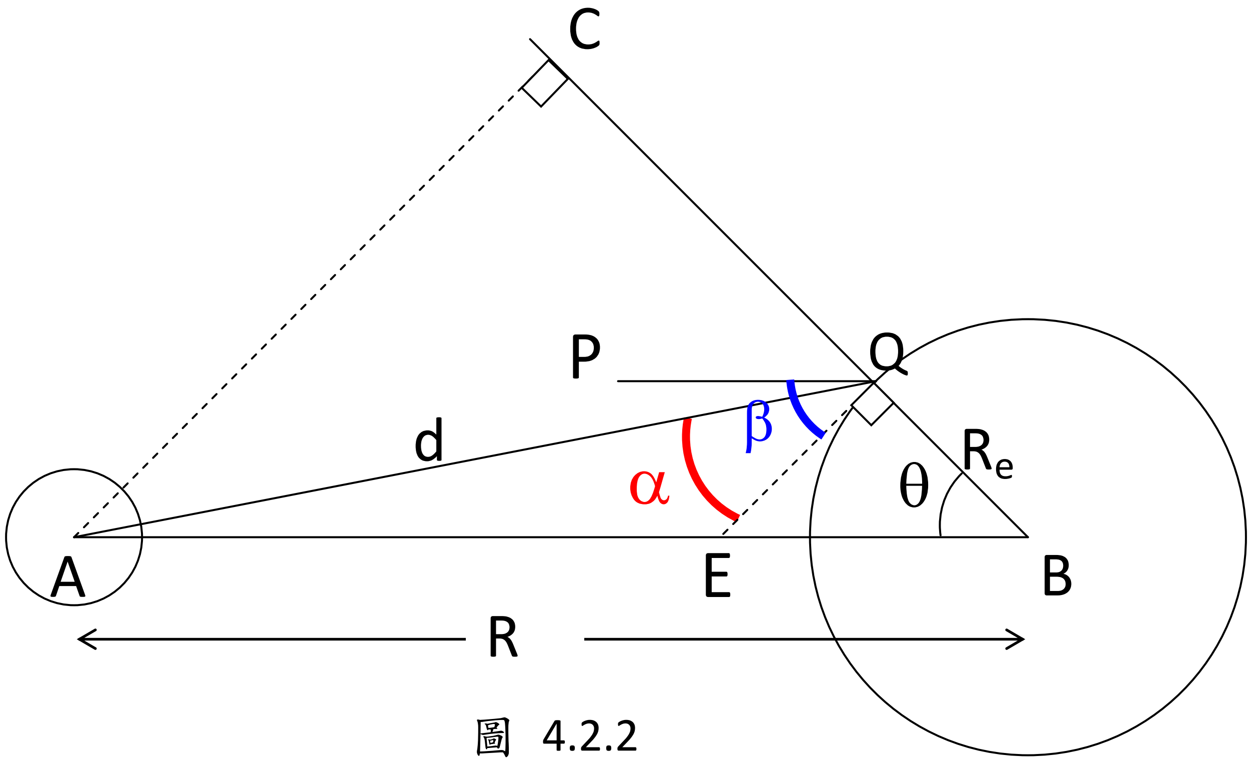


圖 4.2.2

利用餘弦定律，$d^2 = R^2 - 2RR_e\cos\theta + R_e^2$ ......(i)

$\because PQ//AB \quad \therefore \angle QEB = \angle PQE = \beta \quad \therefore \beta = 90^0 - \theta$。

$\therefore \sin\beta = \cos\theta$ 和 $\cos\beta = \sin\theta$ .....(ii)

$\because \angle CQA = 90^0 - \alpha \quad \therefore \cos\alpha = \sin\angle CQA = CA/AQ = R\sin\theta/d$

$\cos\alpha = R\sin\theta/d$ .....(iii)

$\sin\alpha = \cos\angle CQA = CQ/AQ = (R\cos\theta - R_e)/d$

$\sin\alpha = (R\cos\theta - R_e)/d$ .....(iv)

我們需要 (i) – (iv) 這四式。

$$T_h = GM_m\left(\frac{\cos\alpha}{d^2} - \frac{\cos\beta}{R^2}\right)$$

$$= GM_m\left(\frac{R\sin\theta}{d^3} - \frac{\sin\theta}{R^2}\right)$$

$$= GM_m\left[\frac{R}{(R^2 - 2RR_e\cos\theta + R_e^2)^{3/2}} - \frac{1}{R^2}\right]\sin\theta$$

$$= GM_m\left\{\left[1 - 2\left(\frac{R_e}{R}\right)\cos\theta + \left(\frac{R_e}{R}\right)^2\right]^{-3/2} - 1\right\}\frac{\sin\theta}{R^2}$$

把括號 $[....]^{-3/2}$ 展開，只保留至 R_e/R 的一階項，得每單位質量引潮力的水平分量

$$\boxed{T_h = 3GM_m\left(\frac{R_e}{R^3}\right)\sin\theta\cos\theta}$$

.... (4.2.1)

此式的正/負對應於圖 4.2.1 中地球的逆時針/順時針方向。

$$T_v = GM_m\left(\frac{\sin\alpha}{d^2} - \frac{\sin\beta}{R^2}\right)$$

$$= GM_m\left(\frac{R\cos\theta - R_e}{d^3} - \frac{\cos\theta}{R^2}\right)$$

$$= GM_m\left[\frac{R\cos\theta - R_e}{(R^2 - 2R_eR\cos\theta + R_e^2)^{3/2}} - \frac{\cos\theta}{R^2}\right]$$

$$= GM_m\left\{(\cos\theta - \frac{R_e}{R})[1 - 2(\frac{R_e}{R})\cos\theta + (\frac{R_e}{R})^2]^{-3/2} - \cos\theta\right\}\frac{1}{R^2}$$

展開 {….} 這項，保留至 R_e/R 的一階項。

$$(\cos\theta - \frac{R_e}{R})[1 - 2(\frac{R_e}{R})\cos\theta + (\frac{R_e}{R})^2]^{-3/2} - \cos\theta$$

$$\approx (\cos\theta - \frac{R_e}{R})[1 + 3(\frac{R_e}{R})\cos\theta] - \cos\theta$$

$$\approx \frac{R_e}{R}(3\cos^2\theta - 1)$$

最後，得每單位質量引潮力的垂直分量

$$\boxed{T_v = GM_m(\frac{R_e}{R^3})(3\cos^2\theta - 1)}$$

……… (4.2.2)

此式的正/負對應於沿地球半徑向出/向入。

我們得到的 T_h 和 T_v 與文獻上別人找到的完全相同。

有關 T_h 和 T_v 的一些討論：

- T_v 和 T_h 都是同數量級 (same order of magnitude) ，這個當然

因為大家都是引潮力的分量。$T_v \sim T_h \sim GM_m(\frac{R_e}{R^3})$。

- 在式 4.2.2，代 $\theta = 0^0$ (正面向月球) 或 180^0 (正背向月球)，均得 $T_v = 2GM_m \frac{R_e}{R^3}$。但在該兩處，$T_h$ 均是零。 這結果與章節 4.1 的推導相同。

- 代 $\theta = 90^0$ 或 270^0，$\cos\theta = 0$，所以 $T_v = -GM_m \frac{R_e}{R^3}$，$T_h$ 也是零。

- 在 $0^0 < \theta < 90^0$，$T_h \propto \sin\theta\cos\theta > 0$

  這結果很重要。從最低潮走向最潮漲的弧距，佔整整地球周界的四份一。在這範圍，T_h 都是作用同一方向。即是其對海水的加壓效果是持續並累積。

- 以圖表示 T_h 和 T_v 的矢量和在地球表面的變化。

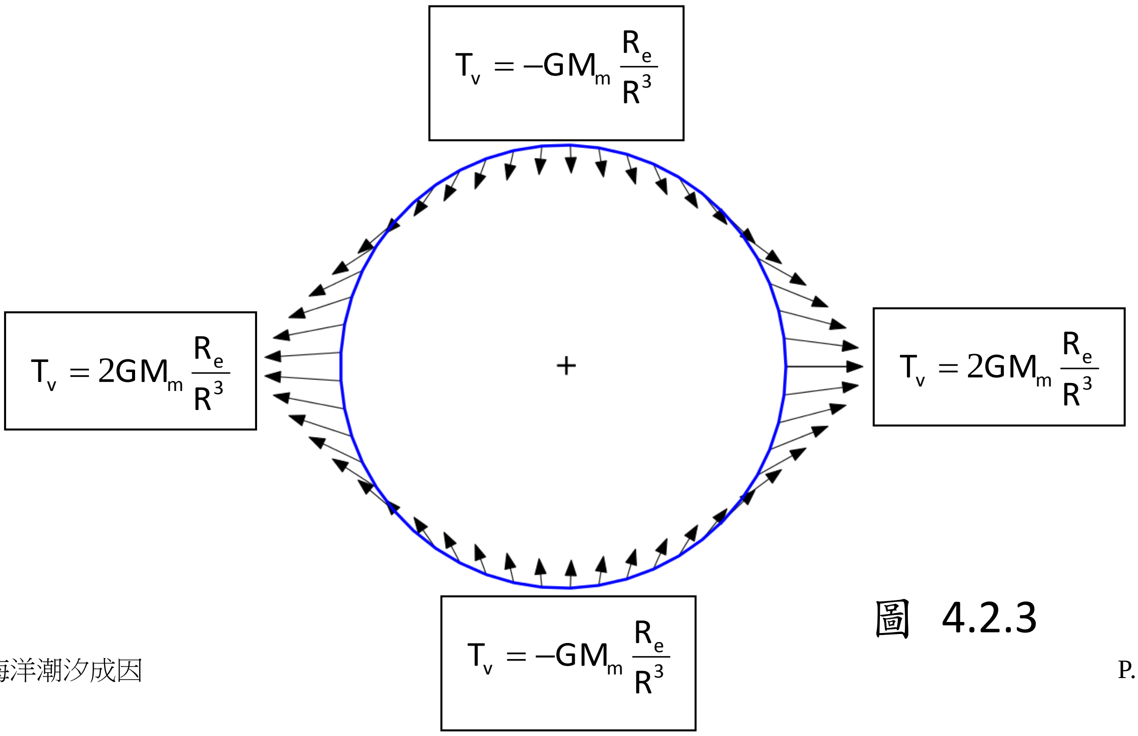


圖 4.2.3

圖 4.2.3 這個引潮力分布與海洋潮汐的形狀極之吻合，因此使人容易相信此力就是直接把水面拉起或壓下而形成潮汐(即是說，潮漲是因為 $T_v = 2GM_m \frac{R_e}{R^3}$ 把水拉起，潮退是因為 $T_v = -GM_m \frac{R_e}{R^3}$ 把水壓下)。

5. 水平引潮力如何引起潮汐

如前所述，潮汐的成因不是垂直分量 T_v，而是水平分量 T_h。

在運用 T_h(式 4.2.1) 來找潮汐高度前，我們先明白它究竟如何引起潮汐。 T_h在地球各處的方向是

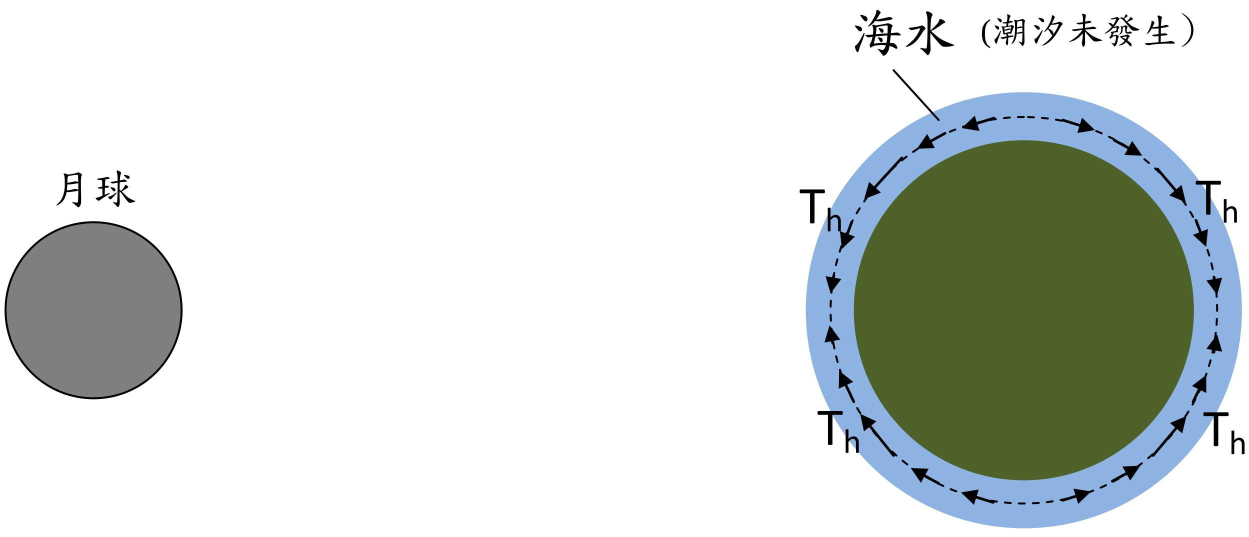


圖 5.1

- 從直觀，如此的 T_h 去擠壓如蛋殼形狀的海水，海水的形狀會變得如何？相信大家會同意在 Y 和 Z 兩處（力推向的中心），海水會被推高。在 U 和 W 兩處（力推離的中心），海水水位下降。

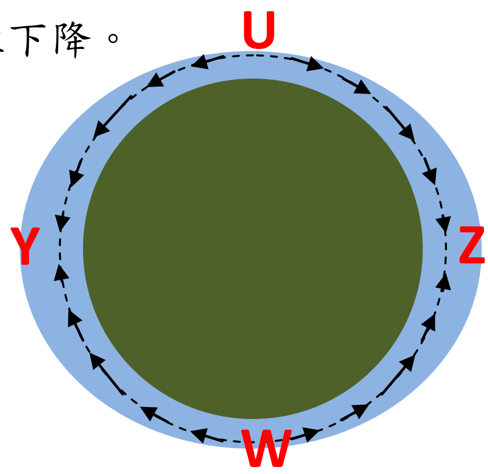


圖 5.2

這不就是潮汐的形狀嗎？

- 水壓公式是 ρgh。這公式的意義是：水的重量從水面開始向下擠壓，在離水面 h 深，壓強是 ρgh。

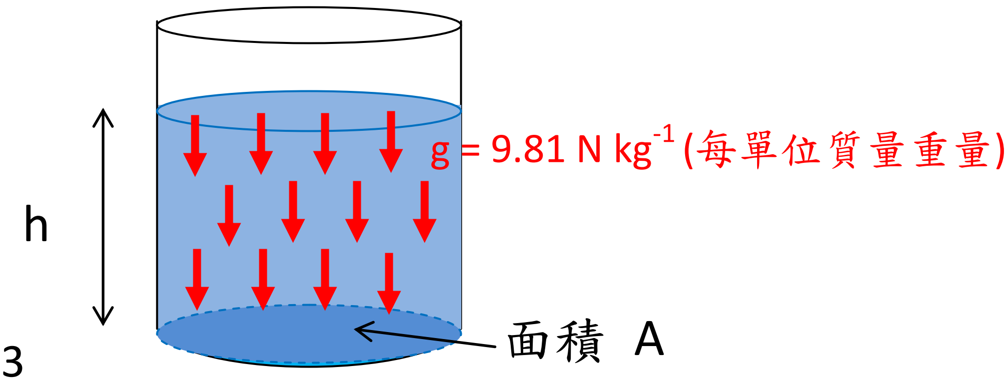


圖 5.3

水的總重量 = (ρAh)g，水底壓強 = (ρAh)g/A = ρgh。

- 向下的 g 造成水壓，橫向的 T_h 也一樣可以。g 造成的水壓是 ρgh，那 T_h 造成的水壓就應該是 $\rho T_h L$，其中 L 是 T_h 的作用

距離。下圖的弧長 L 是 T_h 由 U (低潮) 至 Y(高潮) 的作用距離。

●

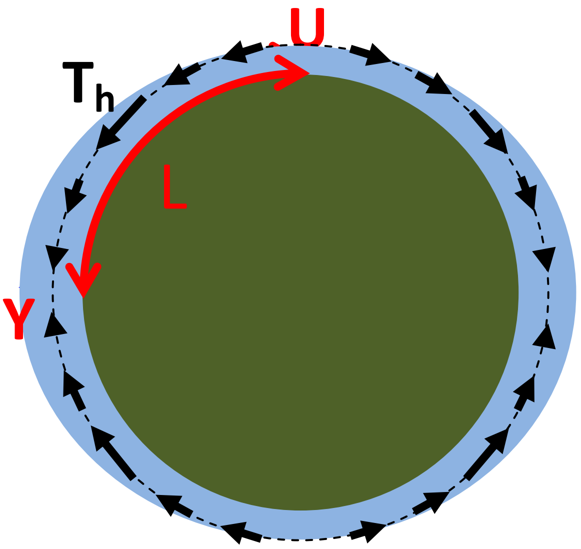


圖 5.4

因 T_h 不斷沿周界橫向擠壓，在位置 Y 比位置 U 造成的額外水壓是 $\rho T_h L$ (T_h 應隨 θ 改變，所以 "$\rho T_h L$" 中的 T_h 是一個平均值)。另一方面，Y 的水壓也應等於當地由於水位升高而造成的 $\rho g\Delta h$，其中 Δh 是 Y 和 U 兩位置的水位差。基於平衡條件，$\rho T_h L = \rho g\Delta h$，即 $\Delta h = T_h L/g$。我們利用 $T_h \sim GM_m(\frac{R_e}{R^3})$ 對 Δh 做一估算。

$L =$ 地球周界的 $1/4 = 2\pi R_e/4 = \pi R_e/2 \sim R_e$。$\Delta h = T_h L/g \sim (GM_m R_e^2/R^3)/g$。因 $g = GM_e/R_e^2$，所以 $\Delta h \sim (M_m/M_e)(R_e^4/R^3)$。代入數值，計出 $\Delta h \sim 0.3$ m。這是對潮汐的一個初步估算。

6. 潮汐高度推導

若把以上估算用的公式$\Delta h = T_h L/g$ 中的分子 $T_h L$ 改為積分 (integration) 就可求得 $\Delta h(\theta)$。這個積分不困難，但我們採用另一方法。

每單位質量海水，垂直向下的力有 $g - T_v$ ，水平的力有 T_h。 水面會調節它的表面形狀，以使當達到平衡時其表面與這些力的矢量和垂直。 如不垂直，合力必有沿表面的分量，表面因此被拉動，這即是還未達至平衡。 我們假設水沒有粘性 (viscosity)。

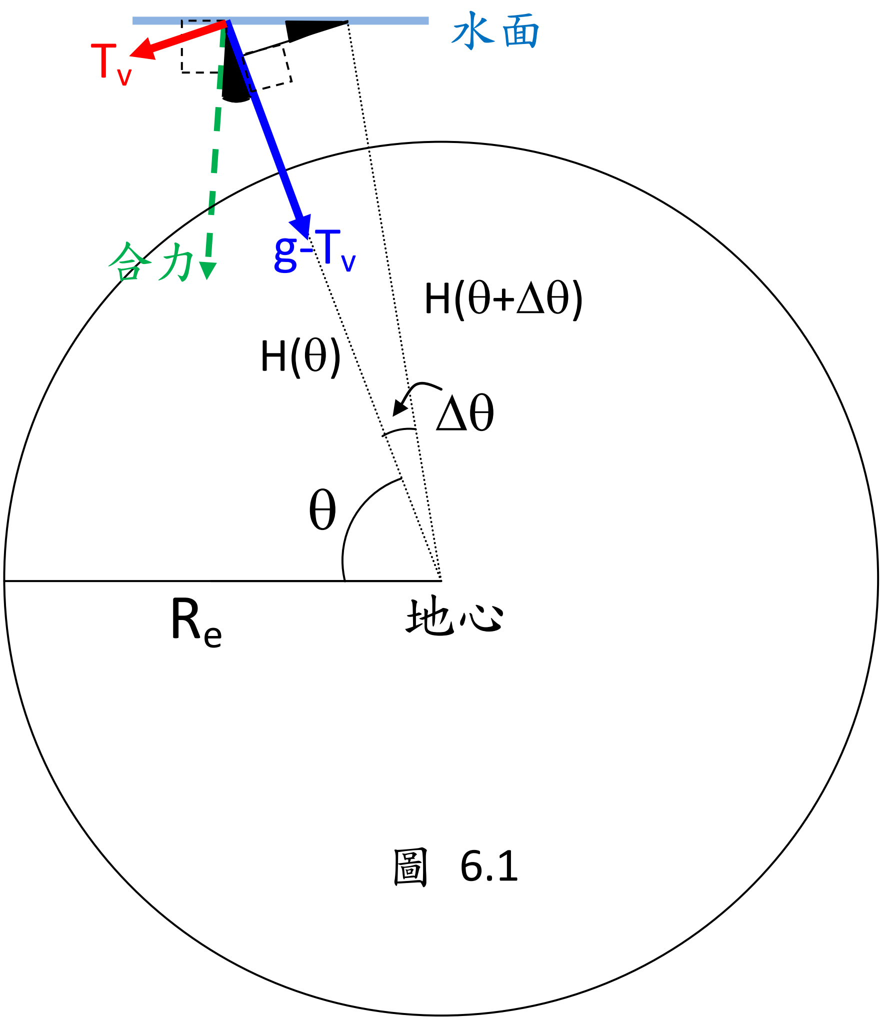


圖 6.1

設水深為 $h(\theta)$ 及地心至水面距離 $H(\theta) = R_e + h(\theta)$

圖中黑色兩角相等，所以 $\frac{H(\theta)-H(\theta+\Delta\theta)}{H(\theta)\tan\Delta\theta} = \frac{T_h}{g-T_v}$ …(*)

左方分子 $H(\theta) - H(\theta + \Delta\theta) = h(\theta) - h(\theta + \Delta\theta)$

∵ $h \ll R_e$

∴左方分母 $H(\theta)\tan\Delta\theta = [R_e + h(\theta)]\tan\Delta\theta \approx R_e\tan\Delta\theta$

∵ $T_v \ll g$，∴右方分母 $g - T_v = g$

上式 (*) 變成 $-\frac{h(\theta+\Delta\theta)-h(\theta)}{R_e\tan\Delta\theta} = \frac{T_h}{g}$

當 $\Delta\theta$ 趨向 0，$\tan\Delta\theta = \Delta\theta$ 及 $[h(\theta+\Delta\theta) - h(\theta)] / \Delta\theta = dh/d\theta$。利用式 4.2.1，

$$\frac{dh}{d\theta} = -k\sin\theta\cos\theta \qquad \text{..........}(6.1)$$

其中 $k = \frac{3GM_m}{g}\left(\frac{R_e^2}{R^3}\right)$

把式 6.1 積分，θ 由變數 x 至 $\pi/2$。

$$\int_x^{\pi/2} dh = -k\int_x^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$h(90^0) - h(\theta) = -\frac{k}{2}(1-\sin^2 x) = -\frac{k}{2}\cos^2 x$$

把 x 改回 θ，

$$h(\theta) - h(90^0) = \frac{3}{2}\frac{GM_m}{g}(\frac{R_e^2}{R^3})\cos^2\theta \qquad \text{....... (6.2)}$$

用 $g = \frac{GM_e}{R_e^2}$ ，而 $h(\theta) - h(90^0)$ 是位置 θ 的水面與最低潮的水位差，這個我們以 Δh(θ)表示。 在 P.34，我們對Δ $h(0^0)$ 曾作了一個估算。

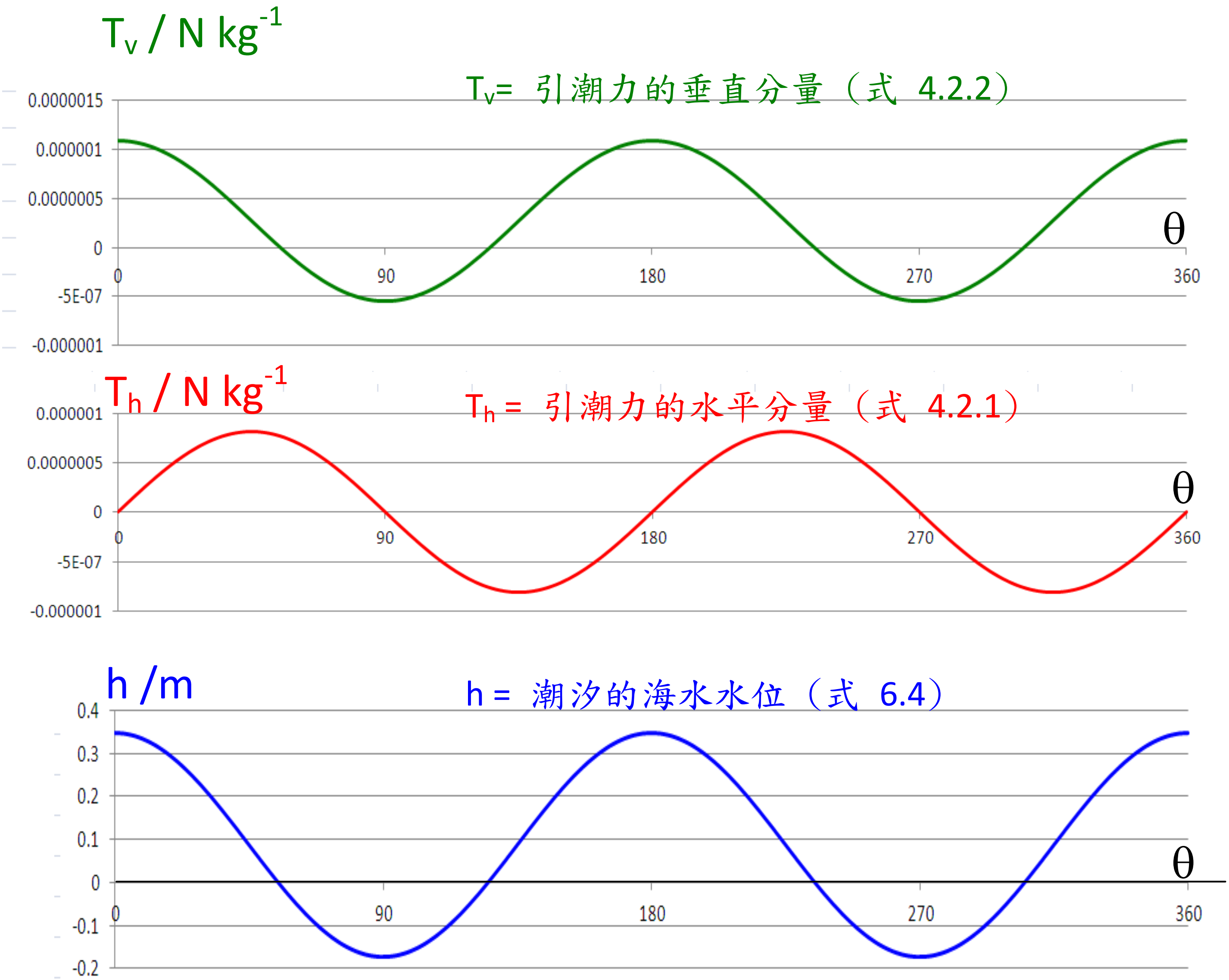
$$\boxed{\Delta h(\theta) = \frac{3}{2}\frac{M_m}{M_e}(\frac{R_e^4}{R^3})\cos^2\theta} \qquad \text{....................(6.3)}$$

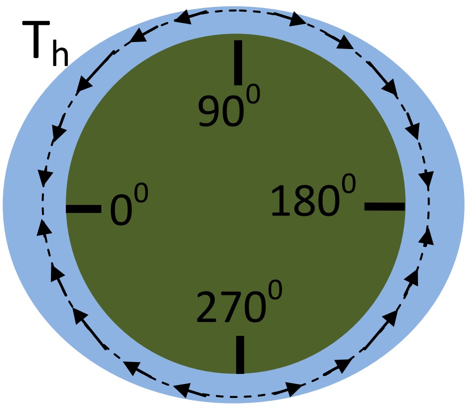
由式 6.2 ，我們設 $h(\theta) = \frac{3}{2}\frac{GM_m}{g}(\frac{R_e^2}{R^3})(\cos^2\theta + C)$，其中 C 為一常數。 如找到 C，我們就可以寫出潮汐的絕對水位變化 h(θ) (即與沒有潮汐時的比較) 。求 C 的條件：海水的總容量在有沒有潮汐時皆相等。 如是，我們求得 C = -1/3 (涉及的數學繁瑣，這裡只寫出結果)。

$$\boxed{h(\theta) = \frac{1}{2}\frac{M_m}{M_e}(\frac{R_e^4}{R^3})(3\cos^2\theta - 1)} \qquad \text{....................(6.4)}$$

我們推導得到的 $\Delta h(\theta)$ 和 $h(\theta)$ 與文獻記載的相同。

以圖表示 $T_v(\theta)$、$T_h(\theta)$ 和 $h(\theta)$ 如何隨 θ 改變。





若把此圖以 0^0 - 180^0 直徑為軸來旋轉，就可得地球表面各處的 T_h 和潮汐水位。

圖 6.2

7. 討　論

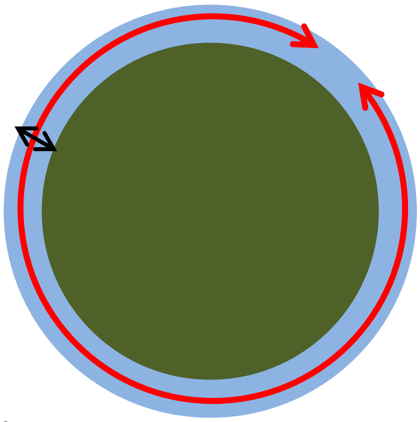
7.1 為甚麼引潮力的水平分量比垂直分量重要

原因有二。

(1) 海水的分布。海水分布在地球表面，其橫向伸延 (angular span) 比徑向伸延 (radial span)大很多很多。

海水的徑向伸延

~ 10^3 m



海水的橫向伸延

~ 10^7 m

圖 7.1.1

(2) 垂直分量 T_v 與地球的引力 g 抗衡，但前者只是後者的 $1/10^7$ 。數式上，多時會 ($g - T_v$) 一起出現，因 $T_v \ll g$，故捨去 T_v。 相反，水平分量 T_h 不須與 g 抗衡。

二項原因，尤以 (1) 重要。 在下章節，我們會看到 T_v 如何在「虛擬的水井」裡消除了 g 的巨大影響。

7.2 開鑿水井，以擴大海水徑向伸延

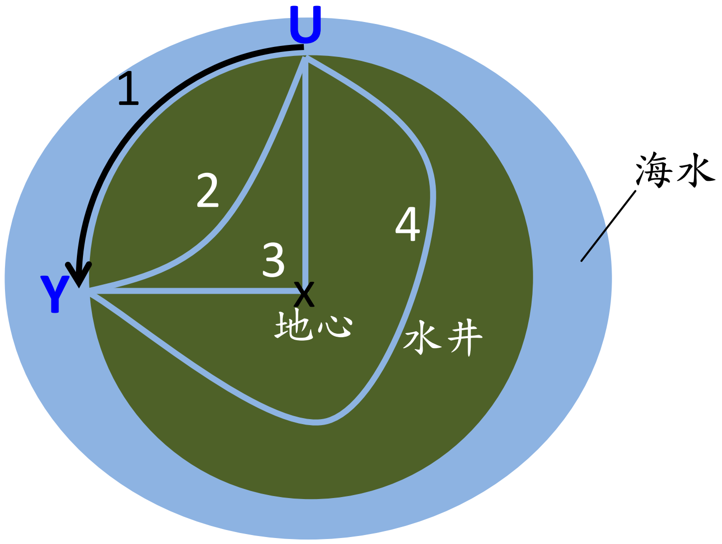


圖 7.2.1

若說海水的徑向伸延受到限制，那可否人為去改變它？ 假設我們在地球開鑿貫穿地心的水井，由地球的一點通去另一點 (圖 7.2.1 的 2、3 和 4 是三條連接 U 和 Y 的水井) 。

在這些水井內 (海)水的徑向伸延一點也不小。因此在這些水井內引潮力的垂直分量 (T_V)也會變得重要。

圖 7.2.1 的 1 - 4 四條水道連接 U 和 Y。無論採用那水道，計算到 U 至 Y 兩點的水壓差必定相同 (以「功」的概念說，引潮力來自月球的引力，此力為保守力 (conservative force) ，故它作的功與路徑無關)

路徑 1 (橫向越過海床)：只用 T_h，不用 T_v 來計算 U 和 Y 的水壓差。

利用水井 2 或 4 由 U 通往 Y：既用 T_h，也用 T_v 來計算 U 和 Y 的水壓差。

利用水井 3 (沿兩垂直半徑)由 U 通往 Y： 只需用 T_v 來計算 U 和 Y 的水壓差。

你或會問：垂直分量 T_v 始終要比大它 10^7 倍的 g 抗衡 (章節 7.1 的第二項理由)，那它會有可能變得重要嗎？ 雖然 T_v 和 g 在量值上十分懸殊，但它們有一分別，是 g 與 θ 無關，但 T_v 與 θ 有關 (θ –dependent)。 這個分別就可以令 T_v 在這些虛擬水井當與 g 「角力」時「勝出」！

圖 7.2.1 的水井 3 即是「牛頓井 (Newton's wells)」。 這是牛頓用來推導潮汐高度的「巧妙」方法。

我們看看水壓如何在井內平衡。

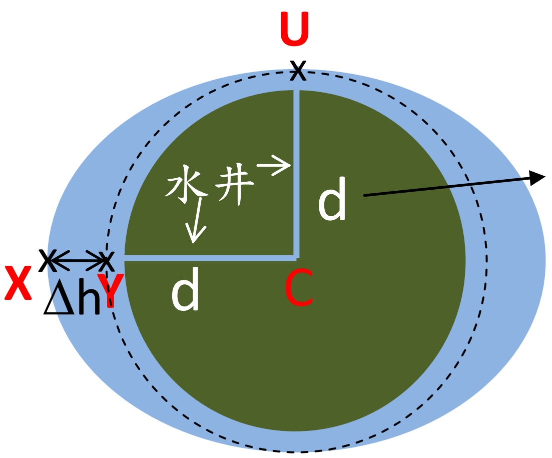


圖 7.2.2

在圖 7.2.2， UC = YC = d，XY = Δh ，所以 XC = Δh + d。

在 U 至 C，水向中心壓，所以 C 的水壓是 $P_o + \rho[\bar{g} - \bar{T}_v(90^o)]d$，其中 P_o是大氣壓強，$\bar{g}$ 和 $\bar{T}_v(90^o)$ 分別是 g 和 T_v 在這 $\theta = 90^0$ 的水道 UC 上的平均值 (地面至地心 g 是由 9.81 N kg^{-1} 線性減至零) 。

在 X 至 C，水向中心壓，所以 C 的水壓是

$P_o + \rho(g - T_V)\Delta h + \rho[\bar{g} - \bar{T}_v(0^o)]d$，其中 $\bar{g}$ 和 $\bar{T}_v(0^o)$ 分別是 g 和 T_v 在這 $\theta = 0^0$ 的水道 YC 上的平均值。

在中心 C，以上兩個水壓必須相同，所以

$$P_o + \rho[\bar{g} - \bar{T}_v(90^0)]d = P_o + \rho(g - T_V)\Delta h + \rho[\bar{g} - \bar{T}_v(0^o)]d$$

關鍵是上式左、右項的 $\bar{g}$ 相同， 但 $\bar{T}_v(90^0)$ 和 $\bar{T}_v(0^0)$ 不相同 (因為 T_v 是 θ 的函數) 。

化簡，得 $\Delta h = [\bar{T}_v(0^0) - \bar{T}_v(90^0)]d/(g-T_v)$ 。

上式分母 T_v 與 g 直接比較，故捨去。所以

$$\Delta h = [\bar{T}_v(0^o) - \bar{T}_v(90^0)]d/g \qquad \text{............. (7.2.1)}$$

上述計算的 Δh 只需引潮力的垂直分量 T_v。

如讀者有興趣，自己做一點數學，就可證明把式 6.3 代 $\theta = 0^0$ 時的結果與式 7.2.1 相符。 [方法：利用式 4.2.2 的 T_v， 把式中的 R_e 改為變數 r，而 $\overline{T}_v d = \int_0^{R_e} T_v(r)dr$]

現實的地球沒有牛頓井。 由 U 至 Y 就只有海床橫向的水道 1。 這就是「為甚麼引潮力的水平分量比垂直分量重要」的原因。

這裡，我們澄清了兩點：

1. 不是所有「潮汐現象」都是水平分量較重要。譬如人造衛星繞地球運行時也受地球引力造成的潮汐效應，這個當然要考慮完整的引潮力。本文所作的結論只適合「海洋潮汐」。

2. 「牛頓井 (Newton's wells)」是用了兩條深至地心的水井來推導潮汐高度。 這方法無疑是成功的，但缺點是看不到不存在這兩條水井的真實地球，引潮力究竟是怎樣引起潮汐。

7.3 h (θ) 和 T_v(θ) 有完全相同的 θ 關係

式 6.4 $$h(\theta) = \frac{1}{2}\frac{M_m}{M_e}\left(\frac{R_e^4}{R^3}\right)(3\cos^2\theta - 1)$$ 和

式 4.2.2 $$T_v(\theta) = GM_m\left(\frac{R_e}{R^3}\right)(3\cos^2\theta - 1)$$

我們推導式 6.4 時，完全沒有用式 4.4.2 ，但結果是它們有完全相同的角 θ 關係。為甚麼？

這不是巧合，它們的 θ-關係必定相同。這是平衡潮理論的一項必然結果。 我們利用「牛頓井」來看看為甚麼如此。

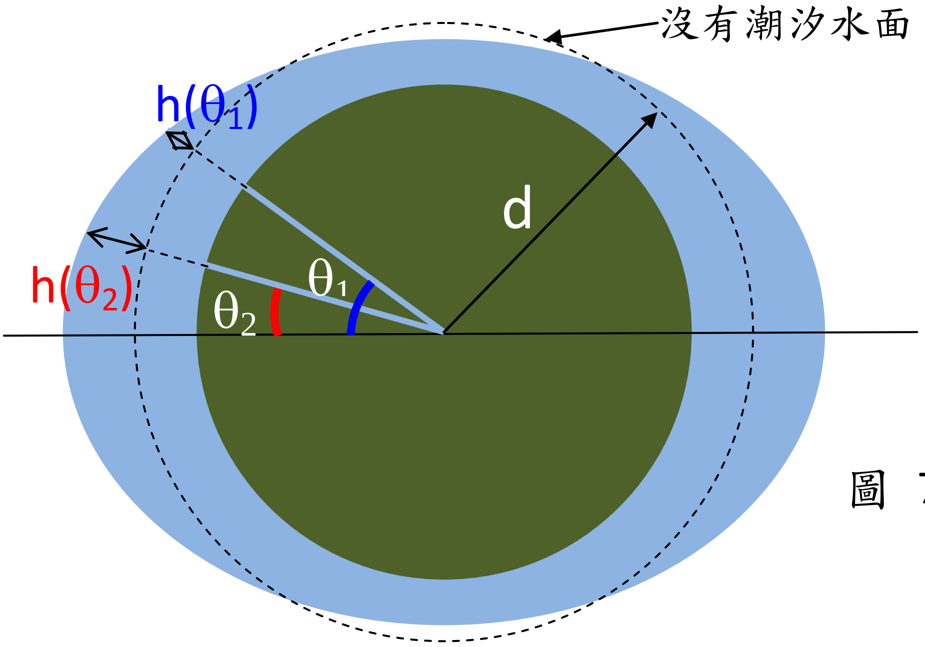


圖 7.3.1

不過，水井改在 θ_1 和 θ_2 開鑿(見上圖)。

分析如垂直的牛頓井相同。最後得

$$h(\theta_2) - h(\theta_1) = [\bar{T}_v(\theta_2) - \bar{T}_v(\theta_1)]d/g$$

其中 $\bar{T}_v(\theta_1)$ 和 $\bar{T}_v(\theta_2)$ 是 T_v 分別在 θ_1 和 θ_2 的徑向 (radial) 平均值。

因為 θ_1 和 θ_2 是隨意 (arbitrary)，所以會推斷

$h(\theta) = \bar{T}_v(\theta)d/g+k$ ，其中 k 是常數。若沒有 T_v，就沒有潮汐，$h = 0$，所以 $k = 0$ (h 的定義見圖 7.3.1)。

另外，假設 $T_v = F(r)G(\theta)$，而 $\bar{T}_v(\theta)$ 是 T_v 在 r-方向的平均值，故它必保留相同的 $G(\theta)$。$\bar{T}_v(\theta)$ 和 $T_v(\theta)$ 有相同的 θ 關係，亦即是 $h(\theta)$ 和 $T_v(\theta)$ 必然有相同的 θ 關係。

平衡潮理論本身沒有說這些水井不可能。所以，這理論的自洽 (self-contained) 和一致(self-consistent) 性質就需要 $h(\theta)$ 和 $T_v(\theta)$ 有相同的 θ 關係，盡管它們在 真 實 的 海 潮 不存在直接的因果關係。

這個相同的 θ 關係或使人「想當然」認為 h 必定是由 T_v 造成。上述分析希望可澄清這誤解。

7.4 略談「引潮勢」方法

月球潮汐源於月球引力，而引力是保守力 (作功與路徑無關)，故我們可定義「引潮力」所對應的「引潮勢」。 文獻亦多喜用「引潮勢」來求 $\Delta h(\theta)$ (公式 6.3)，方法大概是這樣的。

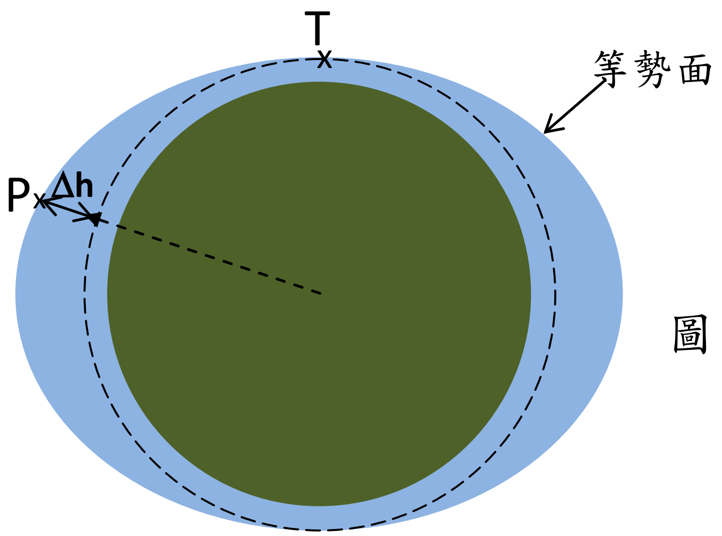


圖 7.4.1

潮汐發生後，海水水面必是一等勢面 (equipotential surface) ，此等同我們在 P.35，章節 6 所說的引潮力必垂直於水面。等勢面的「勢」是指「地球的引力勢」加「引潮勢」(引力勢是每單位質量的引力勢能，即是 mgh/m = gh)。我們分別以 $V_{地引}$ 和 $V_{月潮}$ 表示這兩種勢。 考慮上圖 P、T 兩點，它們的勢相同，所以

$$V_{地引}(P) + V_{月潮}(P) = V_{地引}(T) + V_{月潮}(T)$$

$$V_{地引}(P) - V_{地引}(T) = V_{月潮}(T) - V_{月潮}(P)$$

$$g\Delta h = V_{月潮}(T) - V_{月潮}(P)$$

其中 Δh 是 P 比 T 高出的水位。 最後把 $V_{月潮}$ 用數式寫出，簡化…，就求得和我們公式 6.3 相同的 $\Delta h(\theta)$ 。

我們把「引潮勢」的方法略作介紹，是想說明此方法除了找得 Δh 外，對於在過程中引潮力如何能把水面拉起則付之闕如。因為這樣，雖然 Δh 的公式廣為人知，但對潮汐發生的原因仍存在不少疑問和爭論。

7.5 月球引起的潮汐與太陽引起的潮汐比較

因為 T_v 和 T_h 都是同數量級 $T_v \sim T_h \sim GM_m(\frac{R_e}{R^3})$，所以拿那一個作這比較也可以。

$$月球潮汐:太陽潮汐 = \frac{月球質量}{地月距離^3} : \frac{太陽質量}{地球與太陽距離^3}$$

代入數字，得月球引起的潮汐是太陽引起的 2.2 倍。一些文章誤以為真實的潮汐是由 T_V 造成，但用 T_V 作這比較仍是正確的。

7.6 平衡潮理論的不足

從圖 6.2 (P.38)，我們看到由潮退至潮漲水位升高 ~0.5 m。月球潮汐比太陽潮汐大 2.2 倍。即使它們的效果相長疊加，幅度亦不過 ~0.7 m。 須知道，這只是平衡潮理論的結果。在現實世界，潮汐的幅度可以比這數字大很多。平衡潮理論是潮汐理論中最容易「入門」的模型學說。 比它更成功的是動力潮理論 (dynamic theory of tides)。 動力潮理論比平衡潮理論深奧和數學化，這已非本文能觸及。但一點可指出，是在動力潮理論引潮力的水平分量依然比垂直分量重要。 在章節 7.1， P.39 所提出的兩項理由均是客觀事實，這與採用甚麼潮汐理論無關。

7.7 一些文章已指出引潮力的水平分量較重要

現存很多文獻、論著和網上文章已清楚指出潮汐的真正成因是引潮力的水平分量，而不是垂直分量。這裡，我們抄錄了其中有關部份，以示參考。文章出處依照本文 P.56 起「參考」的編號來標記。

參考 4：

垂直於地球表面的潮汐力不可能有作用，可忽略不計。$10^{-6}ms^{-2}$ 潮汐力在地表水平的力分量，則在潮汐產生中扮演重要角色。..........，此水平分量的力才是真正推動海水潮汐的力，..........$10^{-6}ms^{-2}$ 水平潮汐力相當於在一萬公里的空間尺度（90 度經度或緯度）1 公尺水位差所產生的力，換言之就是這個力可以在一萬公里水平尺度產生大約 1 公尺的水位差。

參考 5：

The tide raising force of the moon, is, therefore, entirely insufficient to "lift" the waters of the earth physically against this far greater pull of earth's gravity. Instead, the tides are produced by that component of the tide-raising force of the moon which acts to draw the waters of the earth horizontally over its surface toward the sublunar and antipodal points. Since the horizontal component is not opposes in any way to gravity and can, therefore, act to draw particles of water freely over the earth's surface, it becomes the effective force in generating tides.

參考 6:

The vertical component... is only of the order of 10^{-7} times the force of earth's gravitation and can be neglected. The horizontal forces are also small in absolute magnitude but are of the same magnitude as other horizontal forces in the ocean and are therefore significant....... These horizontal components are the effective components of the tide-producing forces and are called the "tractive forces".

參考 7:

So does it mean tidal forces are not responsible for the observed tides? Of course they are, but not through the local vertical attraction as sometimes erroneously thought, but through the horizontal component, ...the horizontal tidal force is not negligible and acts to make the fluid converge or diverge. The spatial distribution of this force along the earth's surface is such that it tends to create a bulge in the region of the earth facing the moon and a second bulge at the diametrically *opposite* place.

參考 12:

需要說明的是：海水沿地—月聯線上伸長，不能單純從聯線上的海水受力情況來分析，原因是$F_{潮}$ << mg，$F_{潮}$ 不可能把它拉長， 文獻[2]（作者案：即 阿爾柴貝謝夫，物理學教程，第一卷 第一分冊。錢尚武等譯。北京：高等教育出版社，19 54，189）對此有很好的解釋。大意是(以 θ = 0 為例)：地一月聯線上的海水受到 $F_{潮}$（原文為 $F_{月}$-$F_{慣}$）的作用，合力 F = mg - $F_{潮}$，液體重量F 較正常值 mg 小，因而海水中壓強減小，引起周圍壓強大的海水擠向壓強小的海水，致使這部份海水凸出來了。
因此海水沿地一月聯線上伸長， 不是被 $F_{潮}$ 拉出來的，而是被周圍的海水擠出來的。

總之，產生潮汐的根本原因雖然是$F_{潮}$，但促使海面變形(由球形變為橢球形）的直接原因卻是海水內部壓強發生了全球範圍的大變化，壓強小的海水上升(如 θ = 0^0、 180^0），壓強大的海水下降(如θ = 90^0、270^0） ，………

參考 13:

2.4 引潮力的水平分量才是潮汐動力學中的關鍵因素

引潮力垂直分量的最大值僅為地球引力的 (1/9) x 10^{-6}，其作用可以忽略不計。引潮力的水平分量雖然也很小，卻因為水平分量沒有別的力與之抗衡，而且浩大的海洋中，引潮力水平分量都朝同一方向，因而形成潮流、潮波。…

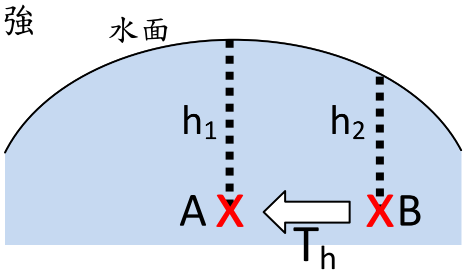
參考 15:

The “horizontal” or tangential component $f_{\theta 1}$ ....., is of the same order of magnitude as the radial force, but, being orthogonal to the dominant field of the earth, it can (and does) shift water around horizontally. ..... The effect of the tangential component is to shift water toward the sublunar region on the side of the earth facing the moon and toward the antilunar rgion on the opposite side. The configuration of the so-called “equilibrium” tide is that in which the water is piled up until the resulting pressure gradients balance the effects of the $f_{\theta 1}$ force on either side of the earth.

對以上論述，筆者補充三點。

1. 利用本文 P.34 公式 $\Delta h = T_h L/g$ 。代 $T_h = 10^{-6} ms^{-2}$、$L = 10^7$ m (即一萬公里) 得 $\Delta h = 1m$。這與「參考 4」的數字相符。

2. 「參考 12」論及「海面變形的直接原因卻是海水內部壓強發生了全球範圍的大變化」。 這說法完全正確。 惟在水面升降過程最後，海水內部同一水平的壓強不會相等，因海水內部的平衡必須依靠引潮力的水平分量 (T_h)。在垂直方向，$T_V << g$，所以 A 和 B 兩點的壓強分別為 $\rho g h_1$ 和 $\rho g h_2$。 A 和 B 雖然處於同一水平，但壓強不可能相同。它們的差別是由 T_h 來"抗衡"，即 $\rho g(h_1 - h_2) = \rho \overline{T}_h x$，其中 x 是 A 和 B 的水平距離。就因為如此，我們才這樣說：「水面的升降是由引潮力的水平分量造成」。



3. 「水平分量(也)重要，它可以把海水拉動流向潮漲位置 ....」，類似說法見諸多個文獻。不是說現實的海洋不是這樣，而是在「平衡潮理論」的框架下，這說法提供不了一幅對諸多由這理論推導出的公式，例如 $\Delta h(\theta) = \frac{3}{2}\frac{M_m}{M_e}(\frac{R_e^4}{R^3})\cos^2\theta$ 背後的物理圖像。當我們捨棄了潮汐是由垂直分量直接把水面拉起的說法之同時，也應提出另一套合理、自洽於這平衡理論的解釋。

7.8 另一些文章的解說

剛才，我們引述了一些持「水平分量較垂直分量重要」觀點的文獻、論著。但讀者亦不難找到另外一些對此問題含糊說不清或甚至筆者覺得其論述不太妥當的文章。

(1) 若文章只定位為一篇非數學的通俗入門介紹，那完全不提及「引潮力的垂直分量微弱到不能把海水拉起」乃十分合理。

(2) 但對一些較「專業」的文章，要求也應該高一些。

英文版維基百科 “tides” 條目中有這樣一句

“…the lunar tidal acceleration (along the Moon–Earth axis, at the Earth's surface) is about 1.1×10^{-7} g … “ (http://en.wikipedia.org/wiki/Tide) 。但看完通篇文章，也找不到這個是 g 的 1.1×10^{-7} 倍的每單位質量引潮力（即是 tidal acceleration）如何克服 g 的作用而能夠把海面拉起。

(3)一篇網上文章 “Ocean Tides - The Physics and Logic” (http://mb-soft.com/public/tides.html) 作了計算， 去說服人接受這個 1.129×10^{-6} ms^{-2} 向著月球，引起潮汐的 “distorting acceleration” 真的可以造成一個 0.367 m 的 “tidal bulge”。其分析大意是：

∵地球引力場 $g = \dfrac{GM_{earth}}{R^2}$ 。g 隨 R 改變。

地面的 g 是 9.8 ms^{-2}，一個垂直高度 0.367 m ，就會令 g 有 1.129×10^{-6} ms^{-2} 的改變。所以一個相同數字的 1.129×10^{-6} ms^{-2} 的潮汐

distorting acceleration 就會把水面提升起 0.367 m。

正確嗎？ 由讀者自行判斷好了。 (以免是筆者曲解了原意，讀者不妨先閱畢原文，才作判斷) 。

7.9 最後兩道問題

(1) 地面的沙石、塵土、樹葉為甚麼不會像海水那樣被引潮力拉扯升離開地面？

月球潮汐是由月球的引力造成。說清楚是由月球的引力差造成。這個引力差即是月球施於物體和施於地心的引力場強度的差別。的確，地面的一粒沙石也受這個引潮力作用，但這個引潮力太微弱，不足以抗衡沙石自己的重量 (是一根火柴與一輛二公噸小汽車重量之比) 。

強調多一次，海潮的發生不是這個極微弱引潮力垂直把海水拉起。

(2) 湖泊究竟有沒有潮汐？

湖泊有沒有潮汐？ 先翻查一些網上資料，例如

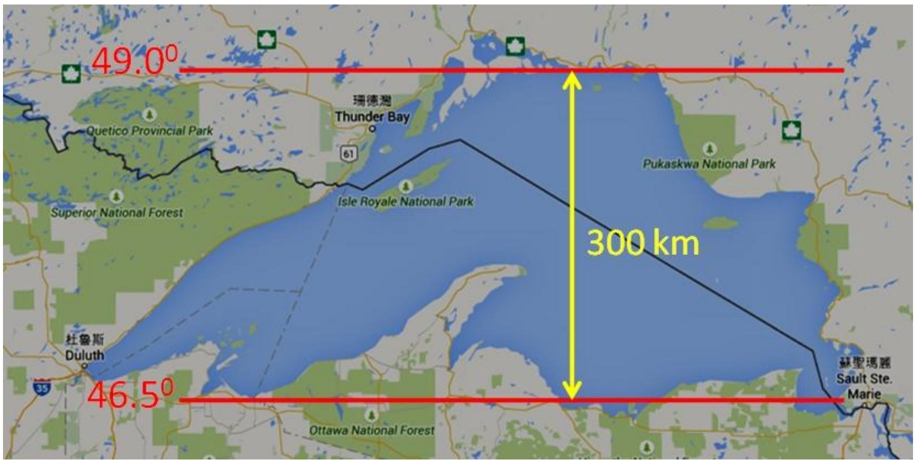
http://oceanservice.noaa.gov/facts/gltides.html 等。

根據資料，潮泊也有潮汐。但幅度很微小，闊數百公里的大湖泊的潮漲僅數厘米而已。以本文說的潮汐成因，這個「小幅度」就因為湖泊的水沒有了那「1/4 地球周界」的超長作用長度。

根據 http://en.wikipedia.org/wiki/Tide 中 “Lake tides” 一欄這樣描述

“ Large lakes such as Superior and Erie can experience tides of 1 to 4 cm, but these can be masked by meteorologically induced phenomena such as seiche. The tide in Lake Michigan is described as 0.5 to 1.5 inches (13 to 38 mm) or 1¾ inches.”

蘇必略湖（Lake Superior）是北美洲五大湖中最大的一座，是世界上面積最大的淡水湖。它的位置和大小如下圖所示。



(i) 先利用本文 P.34 公式 $\Delta h = T_h L/g$ 作一估算。

如果代 $T_h = 10^{-6} ms^{-2}$ 及 $L = 300 \times 10^3$ m，我們得 $\Delta h = 3$ cm。

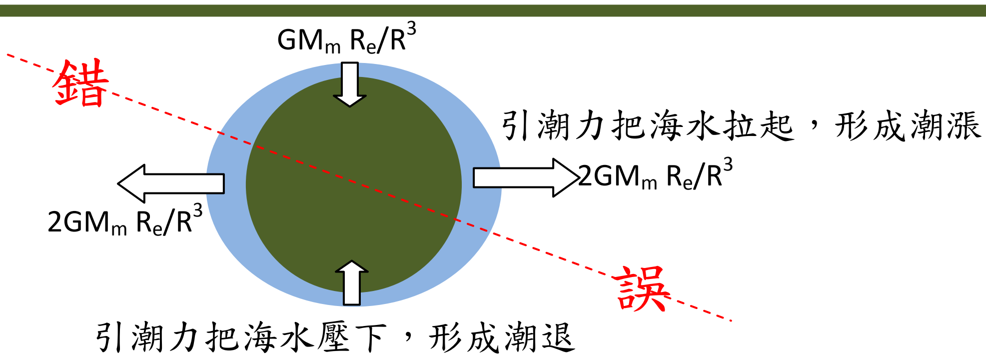
(ii) 蘇必略湖的位置位於北緯 46.5^0 至 49.0^0 之間。利用 P.37 公式 6.3 或公式 6.4，我們計得 $\Delta h = 2$ cm。

數值結果與觀測基本吻合。一般來說，湖泊較海洋平靜，所以平衡潮理論可能更適合於湖泊。湖 泊 潮 汐 是 大 是 小， 不 是 關 乎 湖 水 有 多 深， 而 是 其 湖 面 夠 不 夠 寬 闊。

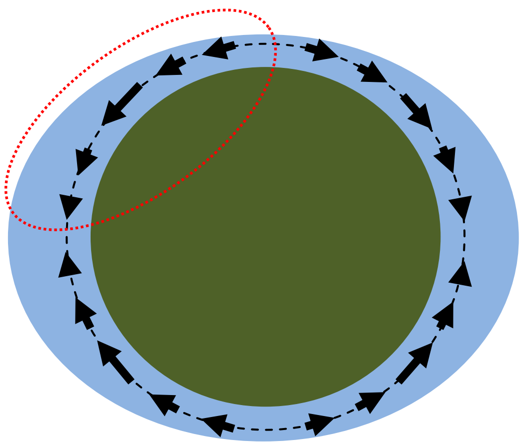
8. 結　語

通過本文，筆者希望能把「潮汐」— 一個頗有爭論，但不大有趣、中學物理課程也鮮有涉及的課題作全面的定性和定量探討。在定量方便，我們沒有使用別人常用的「引潮勢」(tidal potential)。我們用了一個比較「基礎」的方法，是考慮了當平衡潮發生時海水的水壓應如何。這方法的最大好處是不抽象，能把潮汐發生的機制清楚描繪。

隔了一段日子，你或許已忘記本文很多細節。但很希望你仍記得以下這一點，這是本文的重點。



潮漲**不是**因為當地的引潮力把海水拉起，
潮退**不是**因為當地的引潮力把海水壓下。
而是與引潮力垂直分量一樣微弱的水平(切向)分量在「1/4 地球周界」— 這段極長的距離連續不斷把海水擠壓而造成的現象。



10. 參　考

有關「潮汐」的書刊和文章多不勝數。這裡，我們只列出一些程度與本文相若(或稍高一點)的作為參考或進一步閱讀。

以下是筆者在 IOP 出版的 Physics Education 發表的文章。該文簡述本文乙部要點。。

1. C. Ng, "How tidal forces cause ocean tides in the equilibrium theory," Phys. Educ., 50 (2), 159-164 (2015) http://dx.doi.org/10.1088/0031-9120/50/2/159 (Accepted Manuscript)

「潮汐」的一般普及介紹。 NOAA 的網上資源豐富。

2. NOAA 網頁 http://oceanservice.noaa.gov/education/tutorial_tides/welcome.html.

3. B. Schutz, *Gravity from the ground up*, (Cambridge, 2003), p39-45.

「海洋學」論著。 海洋學家稱引潮力的水平分量為牽引力(tractive force)，是造成潮汐的原因。

4. 郭鴻基。<海洋潮汐力>。臺灣：國立臺灣大學大氣科學系 http://kelvin.as.ntu.edu.tw/Kuo_files/Sci/doc/Tide.pdf

5. NOAA 2013 Chapter 3 - Detailed Explanation of the Differential Tide Producing Forces. http://co-ops.nos.noaa.gov/restles3.html

6. S.Pond and G.L.Pickard, *Introductory Dynamical Oceanography,* 2nd ed. (Butterworth-Heinenann Ltd, 1995), p233-261.

7. B. Cushman-Roisin and JM. Beckers, *Introduction to Geophysical Fluid Dynamics*, 2nd ed. (Academic Press, 2011), p.304-308

8. D. Pugh and P. Woodworth, *Sea-Level Science: Understanding Tides, Surges, Tsunamis and Mean Sea-Level Changes,* 2nd ed. (Cambridge University Press, 2014), p. 35-59

「古典力學」書籍。參考 11 有以「牛頓井」作例。

9. T. W. B. Kibble and F. H. Berkshire, *Classical Mechanics*, 5th ed. (Imperial College Press, 2004), p.144-148

10. J.R.Taylor, *Classical Mechanics,* (University Science Books, 2005), p.330-336.

11. J.B.Marion, S.T.Thornton, *Classical Dynamics of Particles and Systems*, 4th ed. (Harcourt Brace & Co.,1995), p.204-210.

教育學報上文章。

12. 鄭定國 〈潮汐的平衡理論〉 大学物理, 1996 年 10 期，頁 21-23

13. 田曉岑 〈潮汐现象的成因〉 大学物理, 1996 年 10 期，頁 24-27

14. H. Hartel, ''The tides–a neglected topic,'' *Phys. Educ.*, 35(1) ,40–45 (2000) http://dx.doi.org/10.1088/0031-9120/35/1/307

15. A.B. Arons, "Basic Physics of the semidiurnal lunar tides," *Am. J. Phys,* 47, 934-937 (Nov. 1979) http://dx.doi.org/10.1119/1.11614

16. E. I. Butikov, "A dynamical picture of the ocean tides," *Am. J. Phys,* 70, 1001-1011 (Sept. 2002) http://dx.doi.org/10.1119/1.1498858
(http://www.atmo.arizona.edu/students/courselinks/fall07/atmo551a/pdf/Oceanic_tides_AmJPhys_Oct2002.pdf)
相關的電腦模擬
http://butikov.faculty.ifmo.ru/Projects/Tides0.html

17. E. Tsantes, "Note on the Tides," *Am. J. Phys*, 42, 330-333 (Apr. 1974)
http://dx.doi.org/10.1119/1.198768

18. M. Sawicki, "Myths about gravity and tides," *Phys Teach.*, 37, 438-441(Oct. 1999)
http://dx.doi.org/10.1119/1.880345
http://austides.com/wp-content/uploads/2014/06/Myths_Sawicki.pdf

19. Mitchell M. Withers, "Why Do Tides Exist?," *Phys Teach.*, 31, 394-398(Oct. 1993)
http://dx.doi.org/10.1119/1.2343817

網上資源。 參考 21 有在不同參考系統觀看地—月互繞轉動的電腦摸擬。

20. Perez-Giz, *What Physics Teachers Get Wrong About Tides!* https://www.youtube.com/watch?v=pwChk4S99i4

21. P. Sirtoli, *Tides and centrifugal force* http://www.vialattea.net/maree/eng/index.htm.

22. S.Hautala, K.Kelly and L. Thompson, *Tide Dynamics* http://faculty.washington.edu/luanne/pages/ocean420/notes/tidedynamics.pdf

引潮力與地震。 近年，多項研究指出引潮力很大機會 (在統計學) 與地震存在因果關係。

23. http://www.scientificamerican.com/article/can-astronomical-tidal-forces-trigger-earthquakes/

24. http://www.newswise.com/articles/view/633395/?sc=rssn&utm_source=feedburner&utm_medium=feed&utm_campaign=Feed%3A+NewswiseScinews+%28Newswise%3A+SciNews%29

25. http://www.scirp.org/journal/PaperInformation.aspx?PaperID=19243#.VVBdsfCbMYQ

◇ 完 ◇

作者： Chiu-king Ng

Email: feedbackZZ@phy.hk 其中 ZZ 是 23 之後的質數

https://ngsir.netfirms.com

http://phy.hk