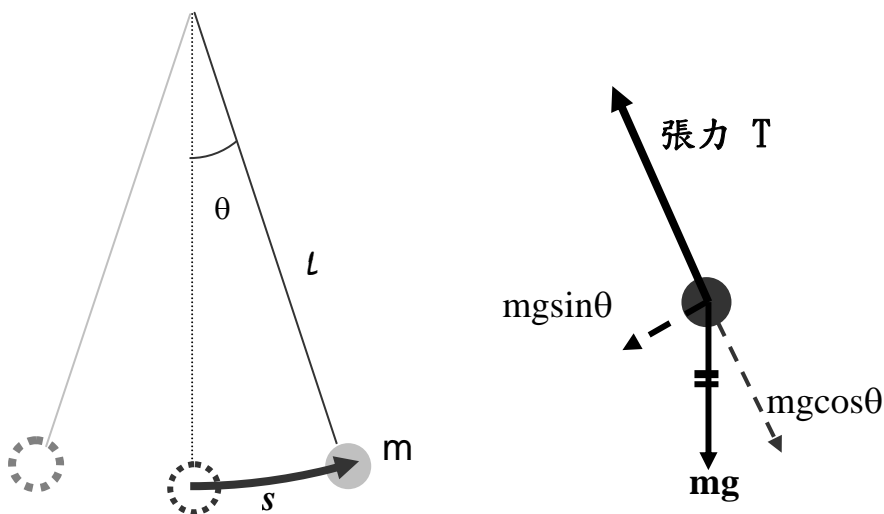


# 單擺是簡諧的兩個推導

高中同學都知道單擺 (simple pendulum) 在小振幅下屬於簡諧運動 (simple harmonic motion)。本文比較它的兩個推導。

方法一



向心淨力用於圓周運動，所以  $T - mg \cos \theta = m \frac{v^2}{r}$

擺錘沿弧  $s$  擺動，切向 (tangential) 淨力是  $mg \sin \theta$ ，指向平衡點。

$$- mg \sin \theta = m \frac{d^2 s}{dt^2} \quad \dots\dots\dots(1)$$

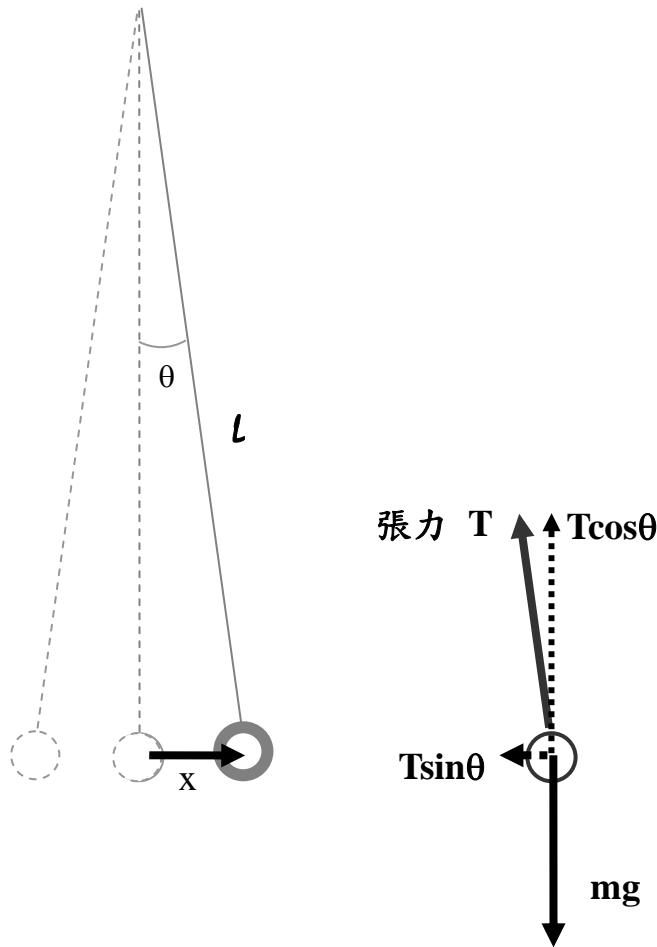
$$\text{若 } \theta \text{ 細小, } \sin \theta \approx \theta = \frac{s}{L} \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{利用 (2), (1) 變成 } -\frac{g}{L} s = \frac{d^2 s}{dt^2} \quad \dots\dots\dots(3)$$

式 (3) 證明擺錘在小振幅下沿弧  $s$  擺動是簡諧運動，其角頻率是  $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ 。

以上證明常見於中學書本。

方法二：



擺錘在垂直方向沒有運動，所以垂直方向沒有淨力：

$$T \cos \theta = mg \quad \text{.....(4)}$$

擺錘在水平方的淨力是  $T \sin \theta$ ，方向是指向中間平衡點。

$$-T \sin \theta = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad \text{.....(5)}$$

$$(5) \div (4), \text{ 得 } -T \tan \theta = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad \text{.....(6)}$$

$$\text{若 } \theta \text{ 細小, } \tan \theta \approx \theta = \frac{s}{l} \quad \text{.....(7)}$$

利用 (7) , (6) 變成  $-\frac{g}{L}x = \frac{d^2x}{dt^2}$  ..... (8)

式 (8) 証明擺錘在小振幅下沿水平擺動是簡諧運動，其角頻率是  $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ 。

兩方法之比較：

	方法一	方法二
平衡點	中間最低位置	中間最低位置
沿吸方向擺動	以繩的懸掛點為中心的弧	水平方向
沿哪方向的力平衡	沒有	垂直方向
張力與重量關係	$T - mg \cos \theta = m \frac{v^2}{r}$ 在最高點， $T = mg \cos \theta$	任何時刻， $T \cos \theta = mg$
有沒有作圓周運動？	有	沒有
作了甚麼假設？	$\sin \theta \approx \theta$	y 方向沒有淨力和 $\tan \theta \approx \theta$

- 「方法一」較常見，看似是標準方法。
- 同學較容易受落「方法一」，因為同學都會同意小錘是進行著圓周運動的。
- 一作者稱「方法二」不正確，是 "wrong concept"。

「方法二」是否真是 wrong concept ?

首先，我們要弄清楚一個概念。

很多時候，物理學方程不容易解，不容易求得一個完全精確解 (exact solution) 。

那時，物理學家就會利用一些有效的近似，把方程簡化，然後來求得一個近似的

解。近似的解與真正的解有多「近似」？物理學家用一個數學術語來說明：「這

個解只是 correct to ... order」。甚麼意思？試以三角比為例，

原來  $\sin\theta$ 、 $\cos\theta$  和  $\tan\theta$  ( $\theta$ 是弧度) 有以下的展開式：

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \quad (9)$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \quad (10)$$

$$\tan \theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \frac{17\theta^7}{315} + \dots \quad (11)$$

以上是無限項 series。無限項加起的值是百份百左邊三角比的值。

當  $\theta$  很小時， $\theta, \theta^2, \theta^3, \theta^4, \dots$  的值就會隨  $\theta$  的指數越來越大而變得越來越小。

若把方程內三角比展開式中的  $\theta^2$  和更高指數的項通通捨去，那時解出的答案當然

不是 exact solution，我們只可說這方程的解只是準確至  $\theta$  的一階 (correct to the

first order of  $\theta$ )。同理，方程中保留了  $\theta$  和  $\theta^2$  下的解就會準確至  $\theta$  的二階

(correct to the second order of  $\theta$ )。

「方法一」和「方法二」分別得出的運動方程  $-\frac{g}{L}s = \frac{d^2s}{dt^2}$  和  $-\frac{g}{L}x = \frac{d^2x}{dt^2}$  都是做了近似。大家都不是完全準確，前者的準確程度限於 **correct to the second order of  $\theta$** ，後者則限於 **correct to the first order of  $\theta$** 。

方法一：徑向 (radial) 的向心淨力用於圓周運動，切向 (tangential) 的淨力用於簡諧運動。

此方法在推導公式時，只用了  $\sin \theta \approx \theta$ 。從式 (9)，知道這近似等同於把公式的  $\theta^3$  和以上的高階項捨去。即是這方法得到的運動圖像可準確至  $\theta$  的二階 (correct to second order)。

方法二：垂直方向沒有淨力，水平方向的淨力用於簡諧運動。

此方法在推導公式時只保留  $\theta$  的一階 (first order)，即是公式中所有高於  $\theta$  一階的項全被捨去。在這準確程度下，向心加速也可忽略。

向心加速  $\propto v^2$ 。因為  $v \propto \theta$ ，所以向心加速是  $\theta$  的二階項 (second order term)。把  $\theta^2$  和以上的項捨去時，向心加速亦隨之捨去。

把  $\theta^2$  和以上的項捨去時， $\cos \theta \approx 1$ ， $T = mg \cos \theta$ ， $T = \frac{mg}{\cos \theta}$  都是正確，是真的「垂直方向的力互相抵消」。

結語：

1.  $-\frac{g}{L}s = \frac{d^2s}{dt^2}$  和  $-\frac{g}{L}x = \frac{d^2x}{dt^2}$  都是取了近似後的方程，分別只是前者比後者做了好一些的近似。前者是準確至 $\theta$ 的二階，而後者只是準確至 $\theta$ 的一階。
2. 不能說「方法二」是 wrong concept，只是做了比常見的一套多一些 approximation。

吳老師 (Chiu-king NG)