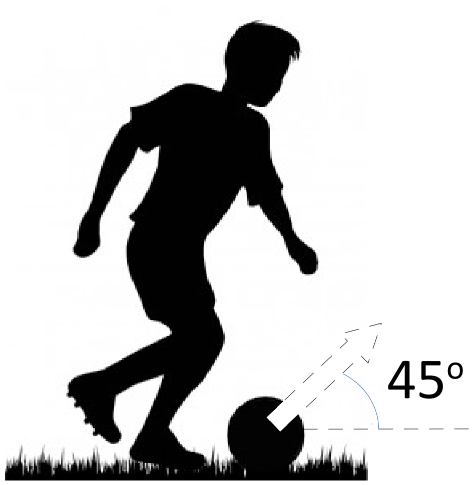
我們經常聽到這樣說：把物件向空中拋出，當拋射角度是 45°，其射程最遠。

事實是，只當由地面向空中發射，落回地面 (例如人躺臥在地上拋射)。以上說法才成立。



設

發射初速 $\vec{u}$，

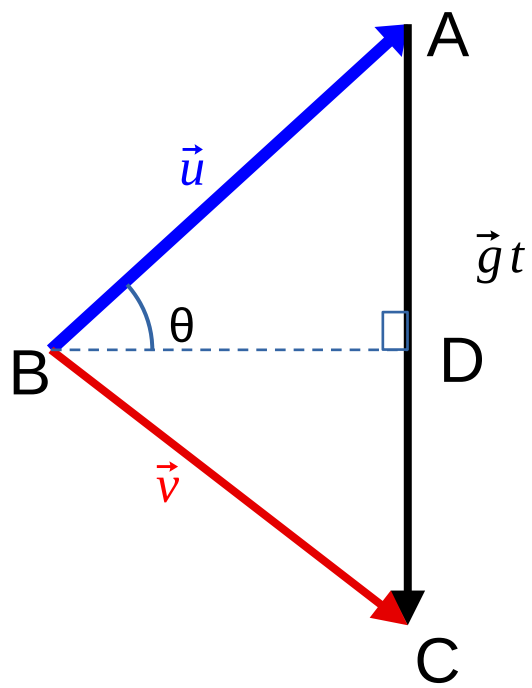
發射方向與水平成角度 θ，

物件落地時速度 $\vec{v}$ 和全程時間 t。

在空中，物件只受向下的引力加速 g 所影響，所以

$$\vec{v}=\vec{u}+\vec{g}\,t \qquad (1)$$

用矢量表示式 (1)



ΔABC 的面積= $\frac{1}{2}(AC)(BD)=\frac{1}{2}(\mathrm{gt})(ucos\theta)$ (2)

ucosθ，即是初速 $\vec{u}$ 的水平量值，$u_x = u\cos\theta$

所以，

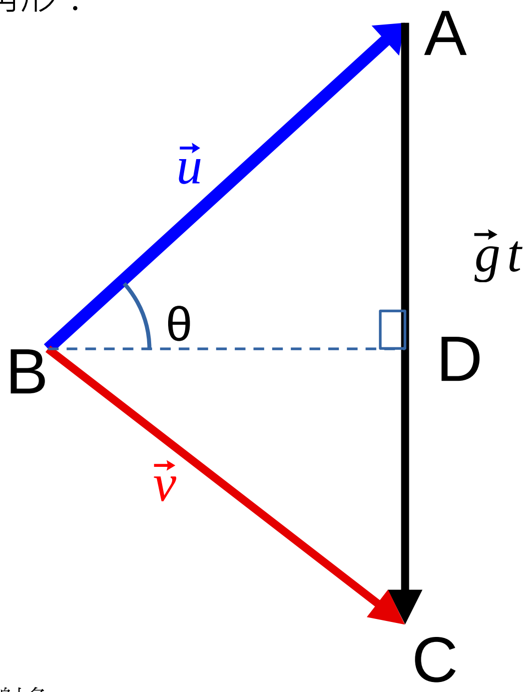
ΔABC 的面積= $\frac{1}{2}g(ucos\theta)(t) = \frac{1}{2}g(u_x t)$

其中 $u_x t$ 就是射程 $R$。

∴ $\boxed{\Delta ABC \text{ 的面積} = \frac{1}{2}gR}$

g 是常數，當 ΔABC 有最大的面積，射程 R 就會最大。

再顯示以上三角形：



(1) 發射初速的量值 (magnitude) u 是固定的 (本問題就是在固定 u 之下用甚麼角度射程最遠)。

(2) 落地時速度的量值 v 也是固定的。根據 能量守恆，在某一高度射向另一高度，無論路徑如何，到達時速度的量值總是一樣。

ΔABC 的面積的另一計法是

$$\frac{1}{2}(AB)(BC)\sin\angle ABC=\frac{1}{2}uv\sin\angle ABC$$

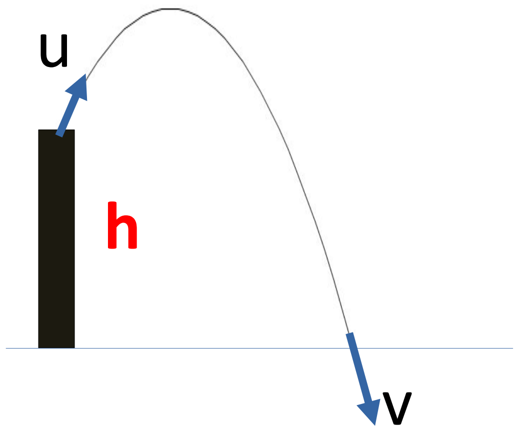
u 和 v 是固定值，所以要求 ΔABC 有最大面積(最遠射程) ，即是要求 $\angle ABC$ 是 90°。

**當落地時速度垂直於發射初速，其射程為最遠**

當 $\angle ABC$ = 90°，$\angle ACB=\theta$，$tan\theta=\frac{u}{v}$

根據能量守恆，$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mu^2+mgh$，即是

$$v=\sqrt{u^2+2gh}$$




結果：出現最遠射程的發射角度是

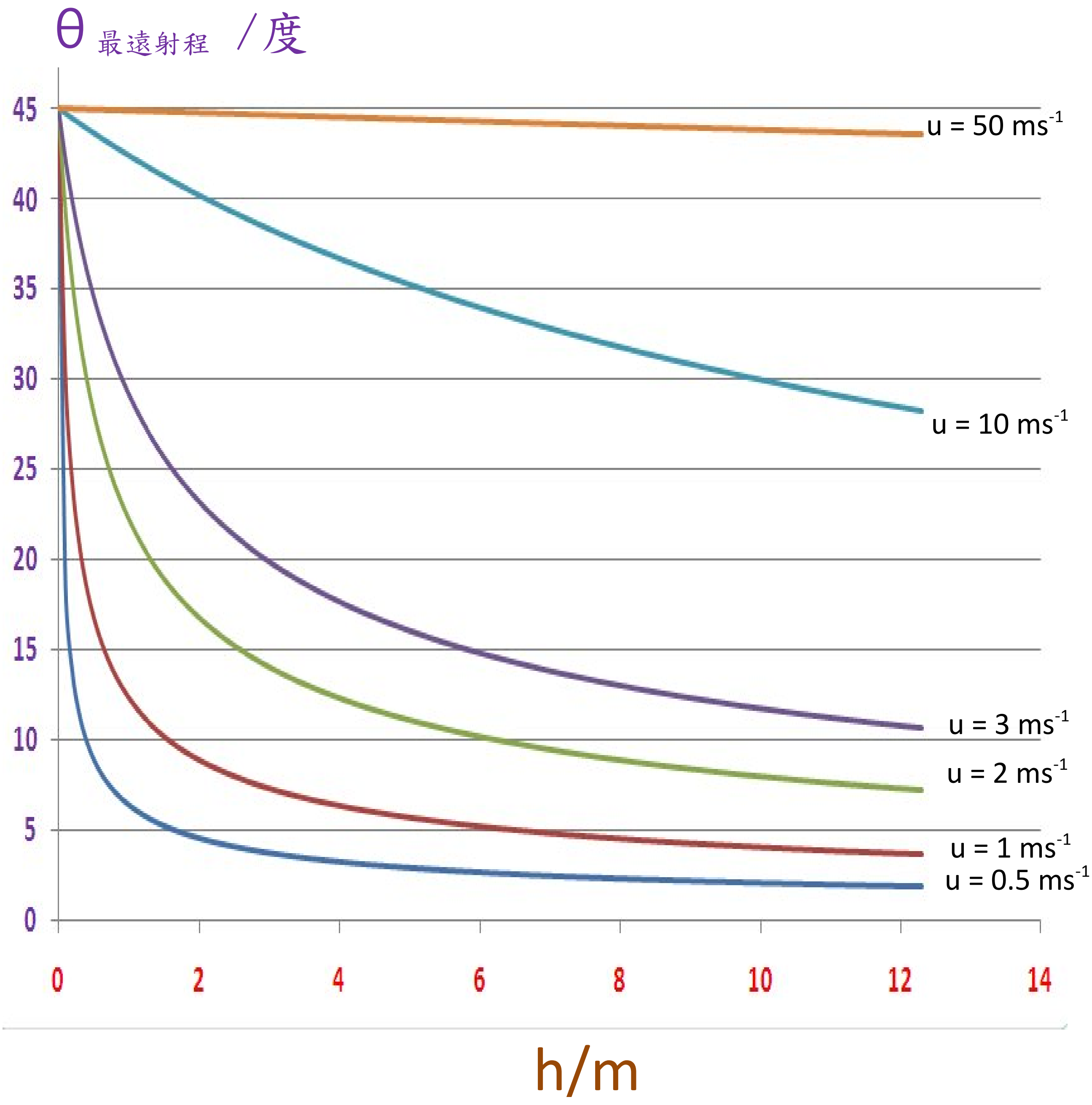
$$\theta_{最遠射程}=\tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+2gh}}\right)$$ ，

最遠射程是

$$R_{最遠}=\frac{1}{g}uv=\frac{1}{g}u\sqrt{u^2+2gh}$$

根據上式，θ 最遠射程 不是固定，而是由 u 和 h 去決定。

在不同 u 和不同 h 之下的 θ 最遠射程 ：



- 除非 h = 0，否則 θ $_{最遠射程}$ 都是小於 45°。

- 當初速 u 很大 ($u^2 >> 2gh$)，θ $_{最遠射程}$只是略小於 45°。

- 初速 u 越慢，θ $_{最遠射程}$ 就越低於 45°。

- 舉例，如把東西向外拋出，h = 1.2 m， u = 4ms$^{-1}$，那時

  θ $_{最遠射程}$ = 32°。

- 因為 R $_{最遠}$ = $\frac{1}{g}u\sqrt{u^2+2gh}$，所以就算大家都是相同的 u 和

  以 θ $_{最遠射程}$ 發 射，h 越 高，R $_{最遠}$ 就 越 遠。

例：

| u | h | θ $_{最遠射程}$ | R $_{最遠}$ |
|---|---|---|---|
| 4 ms$^{-1}$ | 0 | 45° | 1.6 m |
| 4 ms$^{-1}$ | 0.5 m | 38.2° | 2.1 m |
| 4 ms$^{-1}$ | 1.2 m | 32.5° | 2.6 m |
| 4 ms$^{-1}$ | 1.5 m | 30.7° | 2.8 m |

因此，拋鉛球運動是適合大力 ( 製造大 u)，也要身高 (h 大) 的人 。


註：以上求最大射程的方法源自 W.M.Young, Am. J. Phys. 53, 1(1985)

練習：

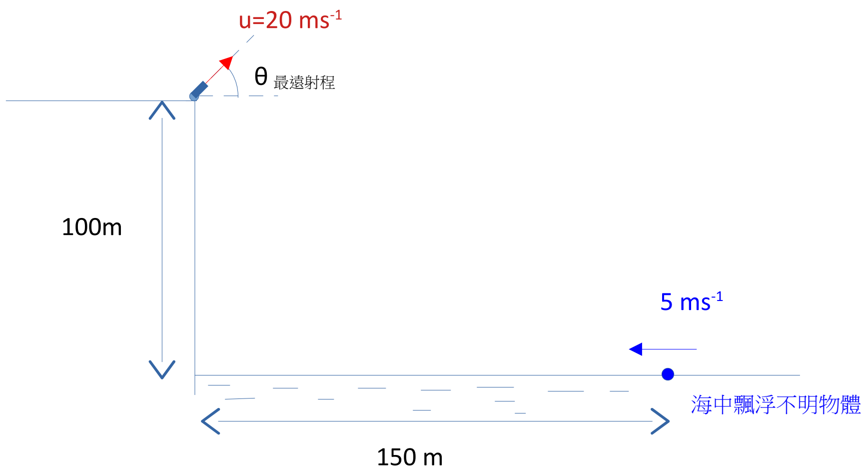
1. 一拋物體在地面以 $45^0$ 發射，射程為 R。問以相同初速，在離地最少一個甚麼高度把拋物體再發射，其射程可達到 2R？那時的發射角應是多少 (取 $g = 9.8\ ms^{-2}$)？

($h=3R/2$, $26.6^0$)

2. 証明以 $\theta_{最遠射程}$ 發射，拋物體在空中的飛行時間為

$$t=\frac{1}{g}\sqrt{2(u^2+gh)}$$

3.




海面上一不明物體以勻速 5ms$^{-1}$飄向一 懸崖邊。懸崖上離海面 100m 處有一大炮正準備以初速 u = 20ms$^{-1}$，用可達最遠射程的發射角 $\theta_{最遠射程}$把炮彈射出來擊中不明物體。若炮台發現不明物體時它與懸崖邊的距離是 150 m，問在此刻多少時間後發射炮彈正好把不明物體擊中？(取 g = 9.8 ms$^{-2}$)

(4.81s)


作者：吳老師 (Chiu-King Ng)
https://ngsir.netfirms.com
http://phy.hk
電郵：feedbackWZ@phy.hk 其中 WZ 是 23 之後的質數