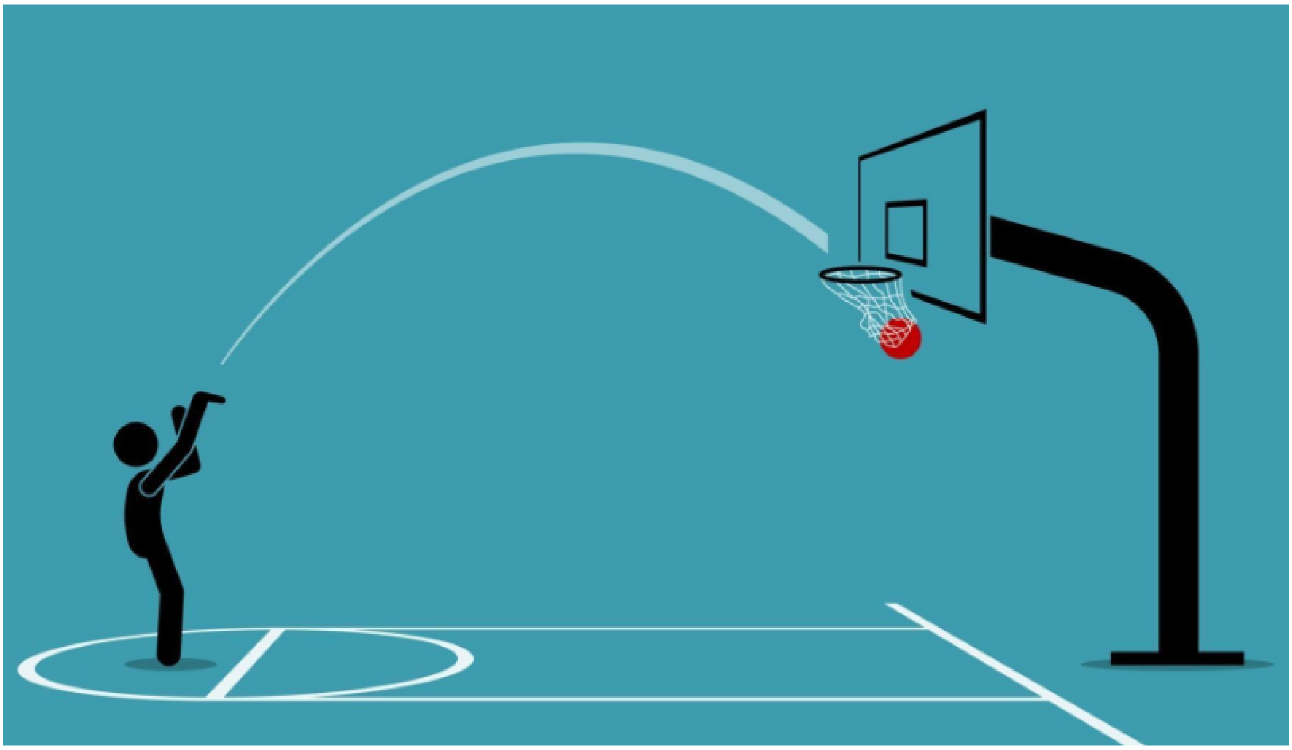
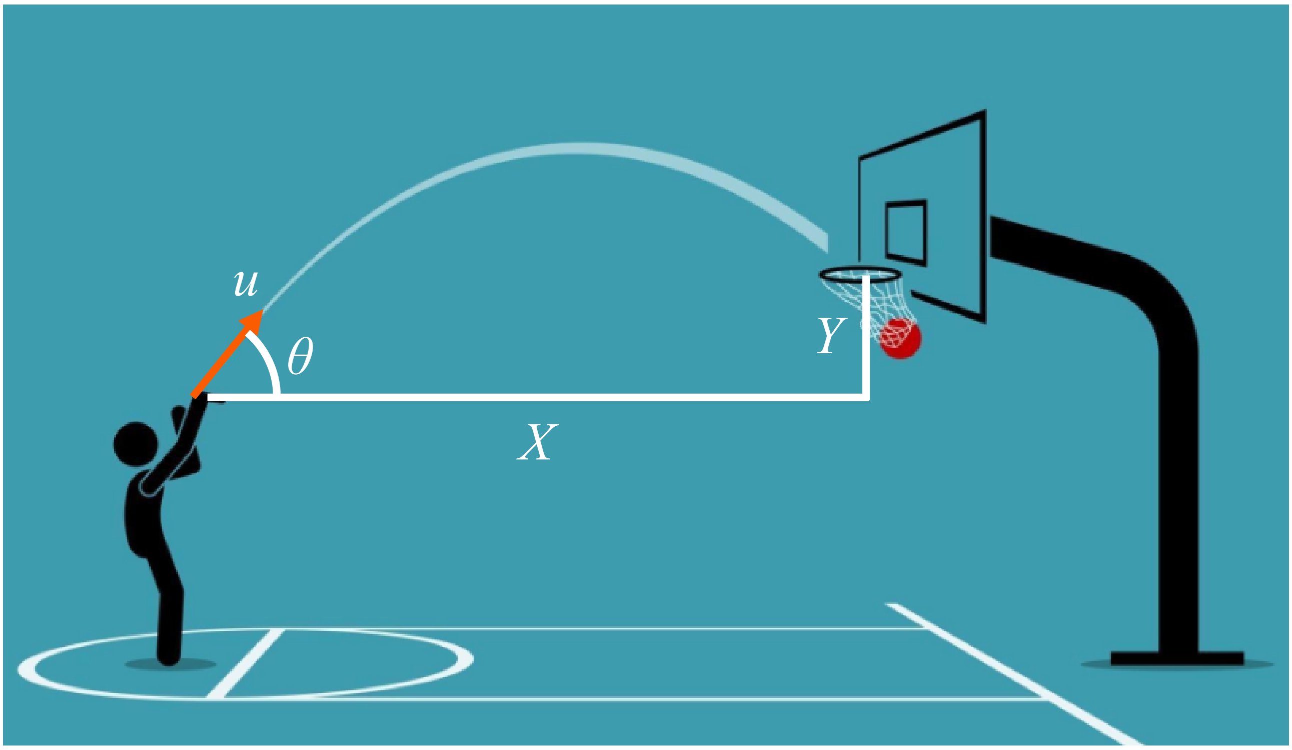
應該把籃球以甚麼角度投射，才可以「最省氣力」地把球「穿針」(空心球) 入網？





拋物體問題：

❀ 水平方向：

初速 $u_x = u \cos\theta$

加速 $a_x = 0$

速度 $v_x = u \cos\theta$

位移 $x = (u \cos\theta)\, t$ (1)

❀ 垂直方向：

初速 $u_y = u \sin\theta$

加速 $a_y = -g$（取向上方向為正）

速度 $v_y = u_y + a_y t$

$$v_y = u\sin\theta - gt \qquad (2)$$

位移 $y = u_y t + \frac{1}{2}a_y t^2$

$$y = (u\sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (3)$$

這裏，我們會先找出兩個角度，一個是「最少投射角」，另一個是「最省『氣力（能量）』投射角」。

（A）　最少投射角（拋物線最高點在籃網頂）

✷ 代 $x = X$ 入式（1），然後把 t 代入式（2），並設 $v_y = 0$

$u\sin\theta - g(\frac{X}{u\cos\theta}) = 0$，或

$$\sin\theta\cos\theta = g(\frac{X}{u^2}) \qquad (4)$$

✷ 代 $x = X$ 入式（1），然後把 t 代入式（3），並設 $y = Y$。

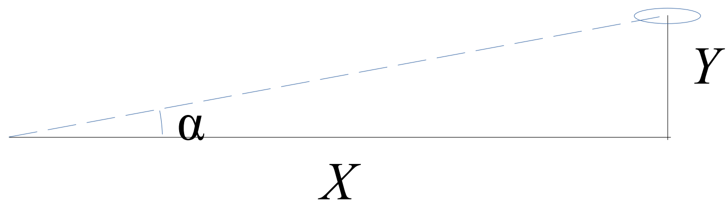
$Y = X\tan\theta - \frac{1}{2}g(\frac{X}{u\cos\theta})^2$，或

$$\frac{1}{u^2} = \frac{2\cos^2\theta}{gX^2}(X\tan\theta - Y)。 \qquad (5)$$

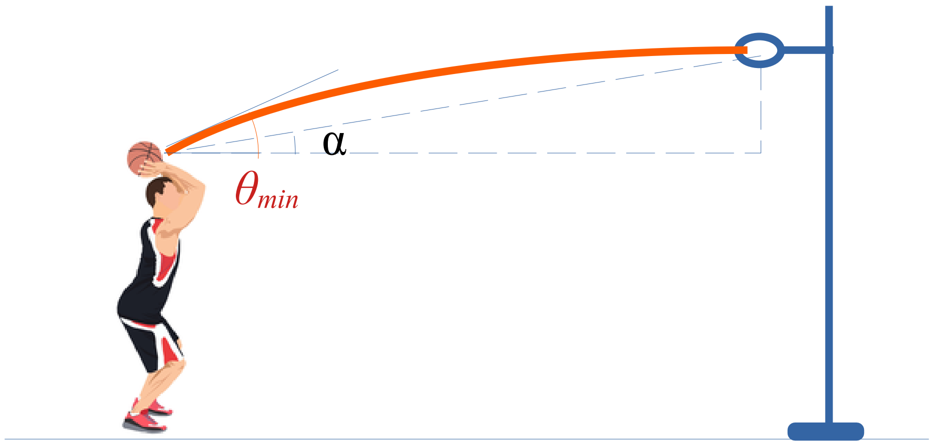
利用式（5）消去式（4）的 $1/u^2$。簡化後得

$$\tan\theta = \frac{2Y}{X}$$

定義 $\tan\alpha = \dfrac{Y}{X}$。



即是， $$\boxed{\tan\theta_{min} = 2\tan\alpha} \tag{6}$$



- ✴ 若 θ < θ_{min}，那無論多大的速度，球也不可能到網。
- ✴ 一般而言，這樣的「幾乎直線拋射到網頂」是很化氣力的投射（見下面討論）。
- ✴ 除了較容易「瞄準」之外，這種投球方式球在空中的時間最短。

（B） 最省「氣力」的穿針投射角

把式（5）改寫為

$$\frac{2}{mu^2} = \frac{4\cos^2\theta}{mgX^2}(X\tan\theta - Y)$$

左邊項是發射時動能 *KE* 的倒數。

$$KE^{-1} = \frac{4}{mgX^2}(X\sin\theta\, cos\theta - Y\cos^2\theta)$$

$$= \frac{2}{mgX^2}[X\sin(2\theta) - Ycos(2\theta) - Y]$$

$$= \frac{2\sqrt{X^2+Y^2}}{mgX^2}\left[\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}\sin(2\theta) - \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}\cos(2\theta) - \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right]$$

因此，

$$KE^{-1} = \frac{2\sqrt{X^2+Y^2}}{mgX^2}[\cos\alpha\sin(2\theta) - sin\alpha\cos(2\theta) - \sin\alpha]$$

$$= \frac{2\sqrt{X^2+Y^2}}{mgX^2}[\sin(2\theta-\alpha) - \sin\alpha]$$

若要求「最省氣力」（*KE* 最少，即是 KE^{-1} 最大）。這情況會在 $\sin(2\theta - \alpha) = 1$ 時發生，亦即是 $2\theta - \alpha = 90^0$ 。

以最少氣力（能量）「穿針」(空心球、nothing but net) 入籃，投射角應為

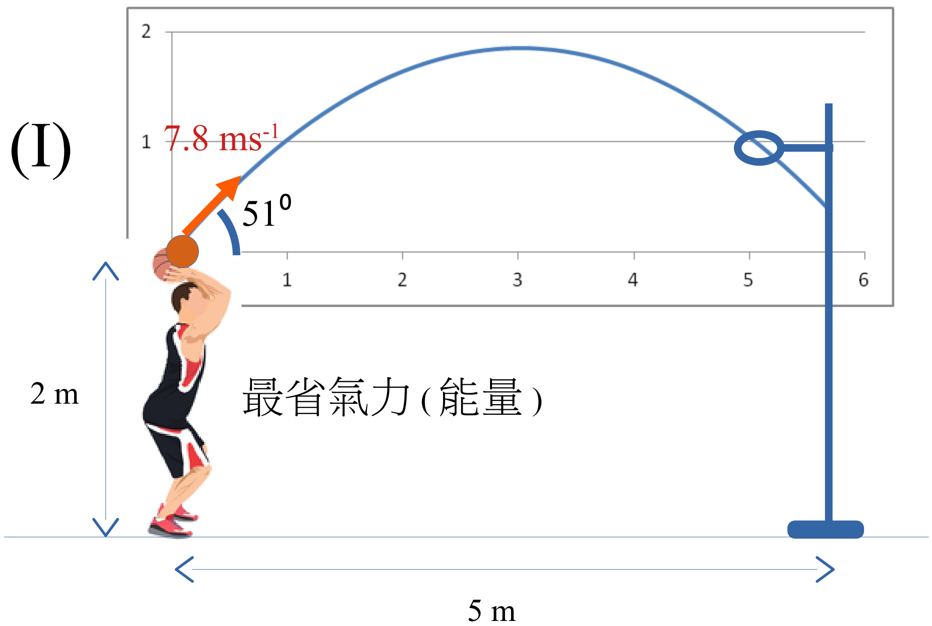
$$\boxed{\theta_{min\,KE} = 45^{o} + \frac{\alpha}{2}} \qquad (7)$$

例：

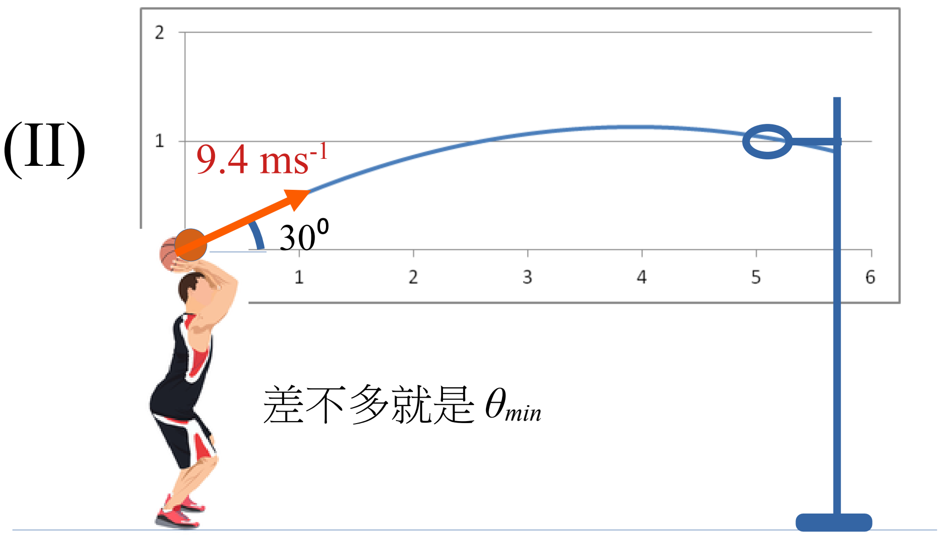
籃球匡離地 3.05 m 高。設球員在距離籃球筐 5 m 遠、離地 2 m 的位置把球擲出。

- $\alpha = \tan^{-1}(\frac{Y}{X}) = \tan^{-1}(\frac{3.05-2}{5}) = 11.86^{o}$
- $\theta_{min} = \tan^{-1}(2\frac{3.05-2}{5}) = 23^{o}$
- 那 $\theta_{min\,KE} = 45^{0} + 11.86^{0}/2 = 51^{0}$
- 利用式（5），求得當 $\theta = 23^{0}$，$u = 11.6\ ms^{-1}$；
  $\theta = 51^{0}$，$u = 7.8\ ms^{-1}$。

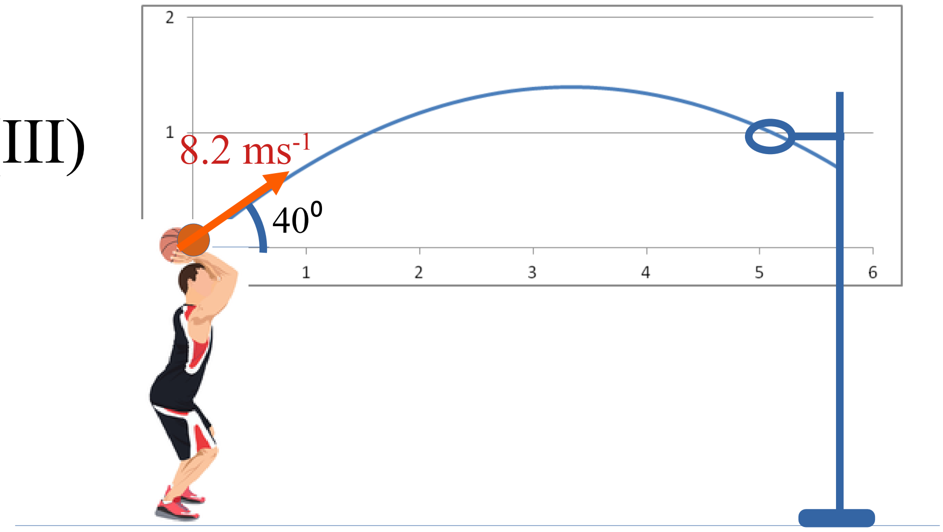
✻ $\theta_{min\ KE}$ 的空中軌跡



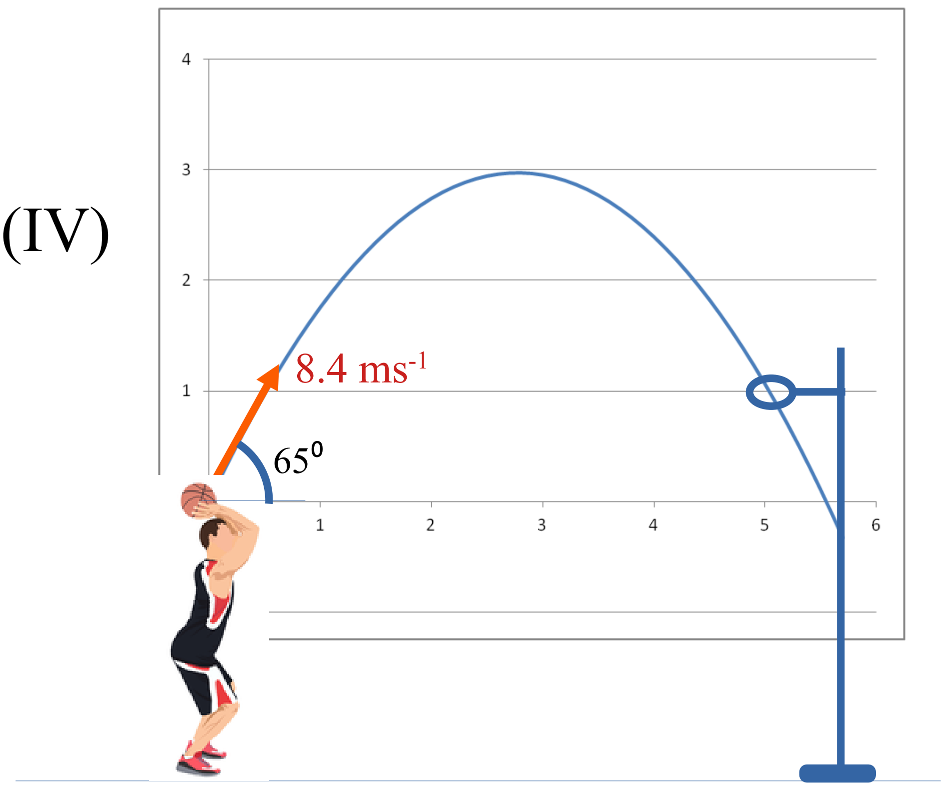
✻ 和其他情況比較：



(III)



(IV)



比較以上的（I）和（II），或問：「（II）射得比（I）還低，為何需要的能量還要大一些？」
須知，發射的能量 $KE_{\text{總}} = KE_{\text{水平方向}} + KE_{\text{垂直方向}}$。
當發射角小時， 總能量的大部分是去了水平方向。 射得低一點，不代表總能量少。水平方向和垂直方向的運動要巧妙地配合，才可出現最少的 $KE_{\text{總}}$。把球直接投向網頂很費氣力。

（I）-（IV）的發射動能

	投擲角度	投擲初速	投擲動能#
(I)	51^0	$7.8\ ms^{-1}$	19 J
(II)	30^0	$9.4\ ms^{-1}$	28 J
(III)	40^0	$8.2\ ms^{-1}$	21 J
(IV)	65^0	$8.4\ ms^{-1}$	22 J

設籃球質量 = 0.625 kg

其實，各以上情況（近距離）涉及的能量分別不大。籃球員做那種投射都綽綽有餘。更重要的，（II）比（I）可能更好因為它比較容易「瞄準」。

但是，如果在較遠的位置來投射，那分別依然不大嗎？

設籃球匡離地 3.05 m 高。設球員在距離籃球筐 *D* 遠 、離地 2 m 的位置把球擲出。

	以「最少投射角」投射			最省『氣力』投射		
D /m	θ_{min} /^{0}	u/ms^{-1}	KE/J	$\theta_{min\ KE}$ /^{0}	u/ms^{-1}	KE/J
2	46.4	6.3	12	58.8	5.7	10
3	35.0	7.9	20	54.6	6.4	13
4	27.7	9.8	30	52.4	7.1	16
5	22.8	11.7	43	50.9	7.8	19
6	19.3	13.7	59	50.0	8.4	22
7	16.7	15.8	78	49.3	8.9	25
8	14.7	17.9	100	48.7	9.5	28
9	13.1	20.0	125	48.3	10.0	31
10	11.9	22.1	152	48.0	10.4	34
11	10.8	24.2	183	47.7	10.9	37
12	9.9	26.3	217	47.5	11.3	40
13	9.2	28.5	253	47.3	11.8	43
14	8.5	30.6	293	47.1	12.2	46

❁ 在遠距離投射，能量的分別還是頗大。在中場位置射籃「穿針」，能量 ~45 J（約等同於把 7 個籃球升高 1m 的能量）。

❁ 這個「最省『氣力』穿針投射角」

$$\boxed{\theta_{min\ KE} = 45^o + \frac{\alpha}{2}}$$

還是有點實戰意義。

❁ 最後，如果我們不理會那"$\alpha/2$"，純是記住"$\theta_{min\ E} = 45^0$"，那相差會很大嗎？

D/m	E/J ($\theta=45^0 + \alpha/2$)	E/J ($\theta = 45^0$)
2	10.14	12.91
3	12.96	14.15
4	15.90	16.63
5	18.88	19.40
6	21.89	22.30
7	24.92	25.25
8	27.95	28.23
9	31.00	31.23
10	34.04	34.25
11	37.09	37.28
12	40.15	40.32
13	43.20	43.35
14	46.26	46.40

基本上沒有分別！
所以，我們記住「無論遠近，最省氣力的『穿針』投射角」

$$\boxed{\theta_{min\ KE} \simeq 45^0}$$

就已經十分足夠了。

❁ 要明白這個 “$\theta_{\text{min KE}} \simeq 45^0$” 也是很容易的事。

還記得那 “45^0 發射 — 最遠射程” 嗎？

* 第一。這是在固定發射速率（speed），這等同於固定發射能量之下能夠去到最遠的射程。我們可以換一句話來說：「如果以最小的速度（能量）拋物體可以射到某一射程，其發射角就是 45^0。換上其他角度，這個能量如何也去不到」。

* 第二。這個 “45^0 — 最遠射程” 是發射與跌回處於同一水平（例如地面發射，跌回地面）才正確。標準籃球筐離地 3.05m，籃球員舉手投球一般都沒有 3.05m 那麼高。亦即是發射與跌回不是處於同一水平。這個差別就是那 “$\alpha/2$” 出現的原由。若果忽略這微小差別（設 $\alpha = 0$），那就是 “$\theta_{\text{min KE}} \simeq 45^0$ ”。

作者：吳老師 (Chiu-King Ng)

https://ngsir.netfirms.com
http://phy.hk
電郵：feedbackWZ@phy.hk 其中 WZ 是 23 之後的質數