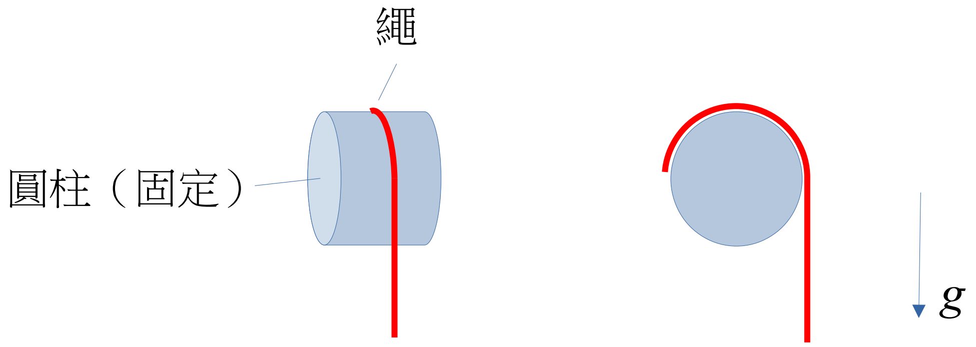
問題：



如上圖所示，一繩的上端放置在一橫放固定圓柱的頂部，沿圓柱的週界由 0° 伸延至 180°。圓柱半徑 R ，繩長 L (設 $L > \pi R$) ，並假設繩的質量均勻、圓柱表面平滑無摩擦。求繩在靜止釋放時的加速度。

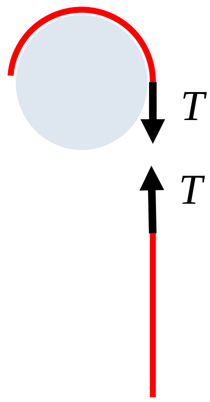
解答：

設繩的質量為 M。

把繩分為兩部分，一是在圓柱頂，長 πR，質量是 $(\pi R/L)M$。

下吊部分，長 $L-\pi R$，質量是 $(1-\pi R/L)M$ 。

設兩部分繩互扯的張力為 T，及此刻繩下墜的加速度為 a。

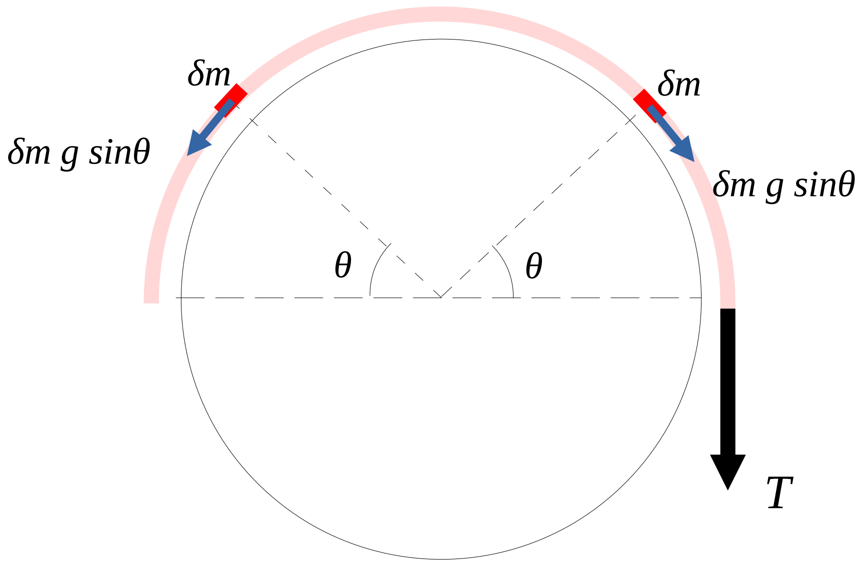


下吊部分， $F = ma$

$$\left(1-\frac{\pi R}{L}\right)Mg-T = \left(1-\frac{\pi R}{L}\right)Ma$$ ，即是

$$T = \left(1-\frac{\pi R}{L}\right)M(g-a) \qquad (1)$$

在圓柱頂部分的繩，地心吸力在它左、右兩邊的影響剛好抵消。



右邊一個 δm，對應左邊一個 δm，它們的 $(\delta m)g\ \sin\theta$ 互相抵消。所以，在圓柱頂部分的繩，

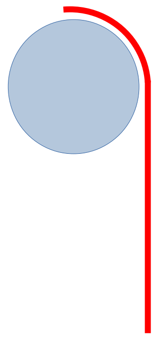
$$T = \left(\frac{\pi R}{L}\right) Ma \qquad (2)$$

由式（1）和（2），求得答案

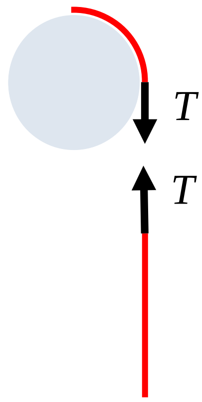
$$\boxed{a = \left(1 - \frac{\pi R}{L}\right) g}$$

若同學希望可學「深一點」，請翻下頁。

若把問題改成以下：



這次，繩只是沿圓柱的週界由 0° 伸延至 90°。圓柱半徑 R ，繩長 L (設 $L > \pi R/2$) ，並假設繩的質量均勻、圓柱表面平滑無摩擦。求繩在靜止釋放時的加速度。

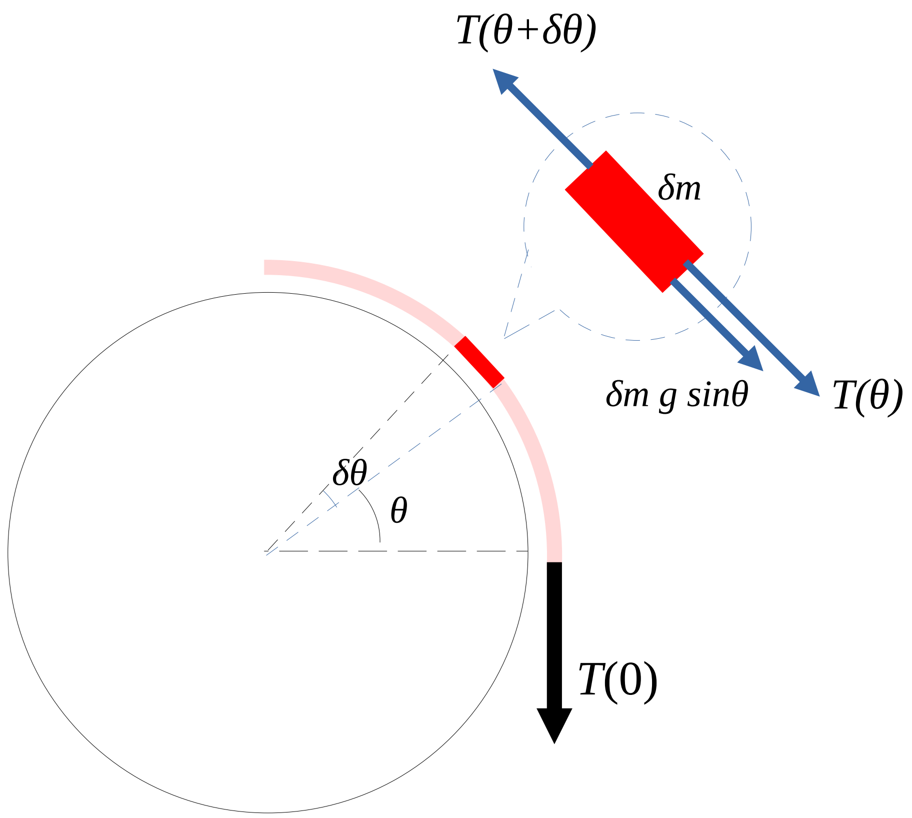


垂直下吊部分和先前分別不大，

$$\left(1-\frac{\pi R}{2L}\right)Mg-T = \left(1-\frac{\pi R}{2L}\right)Ma$$ ，即是

$$T = \left(1-\frac{\pi R}{2L}\right)M(g-a) \quad (3)$$

在圓柱頂那部分就比較複雜，我們處理（i）繩上的張力隨位置 θ 改變；（ii）地心吸力不得不考慮。



$$T(\theta) + \delta m g \sin\theta - T(\theta + \delta\theta) = (\delta m) a \text{，} \tag{4}$$

其中

$$\delta m = \frac{R\delta\theta}{L} M \tag{5}$$

把（5）代入（4），整理後得

$$\frac{T(\theta + \delta\theta) - T(\theta)}{\delta\theta} = \frac{R}{L} M (g \sin\theta - a).$$

當 $\delta\theta \to 0$ ，

$$\frac{dT}{d\theta} = \frac{R}{L} M (g \sin\theta - a) \tag{6}$$

積分後，得

$T(\theta) = \dfrac{R}{L} M(-g\cos\theta - a\theta) + C$，其中 C 是積分常數。

$\because T\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$，

$$\therefore C = \frac{\pi R M a}{2L}.$$

$$T(\theta) = \frac{R}{L} M [a(\frac{\pi}{2} - \theta) - g \cos\theta] \qquad (7)$$

式（3）的 T 即上式的 $T(0)$，所以

$$\frac{R}{L} M [a(\frac{\pi}{2}) - g] = (1 - \frac{\pi R}{2L}) M (g - a)$$

最後，我們求得答案

$$\boxed{a = [1 - \frac{R}{L}(\frac{\pi}{2} - 1)] g}$$

作者：吳老師（Chiu-King Ng）

https://ngsir.netfirms.com

http://phy.hk

電郵：feedbackWZ@phy.hk 其中 WZ 是 23 之後的質數