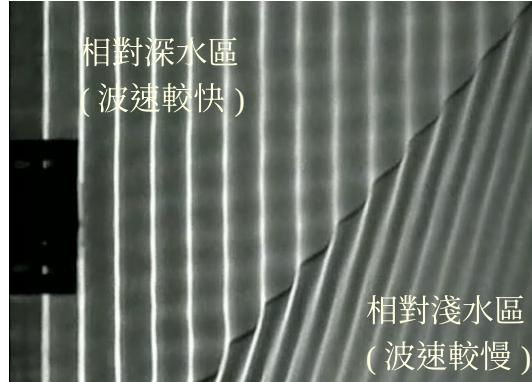


淺水波為甚麼「深水跑得快，淺水跑得慢」？

中學物理學習水波折射：在水波槽沉放一比水面低的方塊，水波在其上經過時波會走得慢一些。這個波速改變造成水波折射。學校正規課本不太解釋為甚麼波速會這樣慢下來。



(網上圖片)

反之，一些非正規教材給的理由是「水底摩擦」 (bottom friction)。可惜，這解釋不正確，本文會花一些章節來解釋 (P.4)。

水波的一些物理基礎

此部分希望可給讀者一些關於水波的基礎知識，惟本文介紹的模型不太需要這些。讀者可省略這部分，直接翻去 P.4

(一) 波動只是波形由一處傳去別處，不涉及物質的傳遞，水波亦然。水波也不純是橫波或縱波。水波在水表面橫向傳播，水面和水下粒子會隨之作上下，同時也作平行於波傳播方向週期運動。

- (1) 水波到達前，水面平坦。當水波抵達，部分水面凸起，形成波峰(crest)，部分水面凹陷，形成波谷(trough)。這些水面上升或下降，是水粒子上下運動造成。
- (2) 在波峰之下，水體積比水面平坦時增多。反之，在波谷之下，水體積減少。這是需要水在水平方向一個流動才可造成。

即是說，水波對應的上下和左右運動是互相配合，缺一不可。兩者皆是簡諧運動，來來回回，沒有淨移動。

水波波形不是一個正弦波形 (sinusoidal waveform)。水波的典型波形是其波峰比波谷略「尖」，如下圖所示。

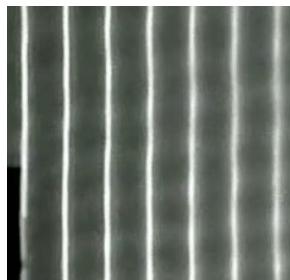


當水波振幅遠小於波長 (稱為「弱波」weak wave)，它的波形才可近似為正弦波。

(二) 我們研究的水波均可滿足以下假設：

振幅 (A) 遠小於波長 (λ)；水為無黏性流體 (inviscid fluid)、不可壓縮 (incompressible) 和無旋的 (irrotational)。

這裏，我們討論的是直波 (straight wave)，即是鄰近的同相波峰、波谷成平行直線。



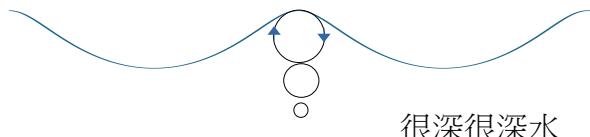
直波 (網上圖片)

(三) 水粒子作甚麼簡諧運動？

這個視乎水深與波長的比較。本文通以符號 d 代表水深。

(1) 當 $d > > \lambda$ 。我們在很深水的大水池或大海洋所激起的水波屬於此例。

水面粒子隨波動作垂直圓周運動，半徑等於波振幅。水面下粒子也作圓周運動，惟半徑隨水下距離快速衰減。約莫離水面半個波長下的區域已平靜不受水面的波動影響。

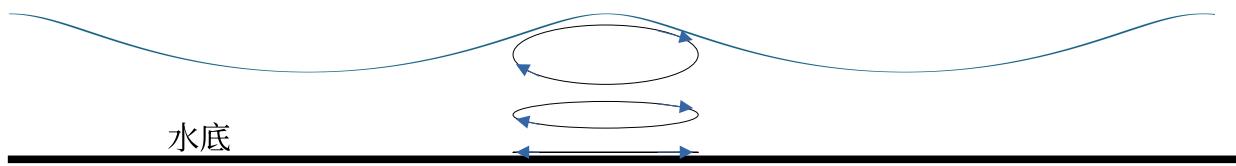


很深很深水

(2) 當 $d \ll \lambda$ 。滿足這條件的稱為淺水波 (shallow wave)，也可稱為長波 (long wave)。盛極淺水水波槽 (ripple tank) 激起的水波、海嘯波 (tsunami) 都屬於此範疇。在這範疇，水面和水下所有粒子齊作橢圓運動 (elliptical motion)。

* 橢圓運動的水平部分的振幅與水下距離無關。即是這個水平振動在那個深度都沒分別。

* 橢圓運動的垂直部分的振幅與水下距離有關：從水面等於波動振幅開始，然後線性隨水深減少，至水底振幅為零。換言之，在水底水粒子只作水平振動，沒有垂直運動 (因為粒子不能穿越水底)。



(四) 水波波速公式

通用公式是

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kd)} \quad (1)$$

其中 c 是波速， $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ， g 是引力加速， d 是水深。

$$(1) \text{ 當 } d \gg \lambda \quad \therefore kd \gg 1 \quad \therefore \tanh(kd) \approx 1 \quad \therefore c = \sqrt{\frac{g}{k}}.$$

波速與水深無關，但與波長有關。

$$(2) \text{ 當 } d \ll \lambda \quad \therefore kd \ll 1 \quad \therefore \tanh(kd) \approx kd$$

$$c = \sqrt{gd} \quad (2)$$

(五) 本文希望可對公式 (2) 提供適合中學生的物理定性解釋：為甚麼淺水波波速會隨水深 d 改變？

本文說的「深水區」和「淺水區」都是指在條件 $d \ll \lambda$ 下的「淺水中的相對深水區」和「淺水中的相對淺水區」。記住，我們說的「深水區」並不是滿足 $d \gg \lambda$ 「很深很深水」的深水區。

「水底摩擦」不是「深水快，淺水慢」的正確解釋

(A) 水底摩擦的方向

(1) 先前已說，淺水波水底粒子是緊貼水底平面作 前後週期運動。如果水底存在摩擦，那 摩擦的方向一半時間是相反波的前進方向，但也有 一半時間是順着波的前進方向。

明顯地，圖像「淺水波受水底摩擦的作用正如一方塊在一粗糙面移動時受到摩擦阻礙而減慢」是錯的。

(B) 儘管「水底摩擦」對波速可能有影響，但它 一定不是 「深水快，淺水慢」的主因

(1) 公式 (2) (或公式 (1)) 已充分反映波速與水深的關係，有無數的實驗基礎。但公式中並沒有「水底摩擦」這一參數。即是說，解釋「深水快，淺水慢」基本不依賴「水底摩擦」。反過來說，若說「海底摩擦」就是原因，那應該可以從「海底摩擦」出發推導出 $c = \sqrt{gd}$ 。但事實上，可以嗎？

(2) 「水底摩擦」或會把水波變慢，但必不會把水波變快。水波從深水區進入淺水區，再由淺水區重入深水區。波速由快變慢，再由慢變快。整個過程，單獨由「水底摩擦」能說得通說得明白嗎？

(3) 若果「水底摩擦」真會影響波速，那唯一可能它只是一個 微小的修正項 (correction term)。

(C) 儘管「水底摩擦」對波速可能有影響，但 影響必很微弱

(1) 若「水底摩擦」對波速有不可忽略的影響，那我們可以在固定水深的水波槽以水底不同粗糙程度來劃分不同區域，水波進出這些區域已可以表現折射現象。

但我們從沒見過 / 聽過這樣的實驗，
這已間接說明無論水底是平滑或粗糙，
波速都不會有明顯變化。

水波會因此表現折射嗎？

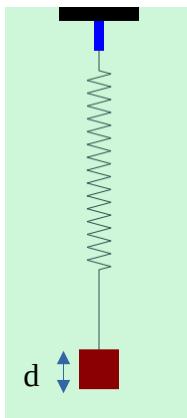
水波槽 (固定水深)

水底非常粗糙

水底非常光滑

(D) 一個類比

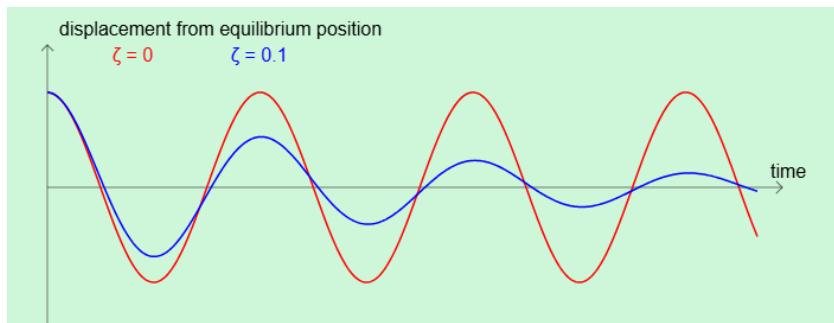
一彈簧垂直吊起一邊長為 d 的實心立方體。把立方體拉下少許然後釋放，立方體作簡諧運動 (simple harmonic motion)。



問：當 d 增大，振動頻率為甚麼會下降？

答：因為當 d 增大，方塊的橫截面積增大，這樣方塊運動時受的空氣阻力增加，因而減慢方塊的運動，故頻率下降。

這答案靠譜嗎？沒錯啊，阻尼簡諧運動 (damped shm) 因阻尼增加頻率微微下降。



紅線 :無空氣阻力

藍線 :有空氣阻力。週期比藍線的確略長

但是，譬如若 d 變成 $2d$ ，那 m 變成 $8m$ ，那 ω 變成 0.35ω 。「空氣阻力」解釋不了 ω 如何可以變成 0.35ω 。熟悉 shm 的人也知道回答上述問題應該使用公式 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 。

「空氣阻力」會造成輕微「頻率下降」，但不是造成「頻率下降」的基本原因。

類似地，

「水底摩擦」或會真的造成輕微「波速變慢」，但不是造成「波速變慢」的基本原因。

根據流體力學理論，bottom friction 對水波的主要影響是令其振幅衰減 (amplitude attenuation)，其對波速的影響非常輕微，一般情況下可忽略。

既然不是「水底摩擦」，那「深水快，淺水慢」的真正（主要）原因是甚麼？

質心 — 單擺模型

UC Berkeley 物理學家 Frank S Crawford 在 1987 American Journal of Physics 發表一篇很短的文章

“A simple model for water-wave dispersion relations” (Am. J. Phys. 55, 171–172 (1987))。文章利用駐水波 (standing water wave) 的質心 (center of mass) 運動來推導公式 $c = \sqrt{gd}$ 。

不單止如此，筆者也發現這模型正好提供「深水快，淺水慢」的一個很容易明白的定性解釋。以下我們用一個非數學的途徑來介紹此模型。

考慮在一個盛着水的長方形水缸產生水駐波 (water standing wave)，如下圖所示。

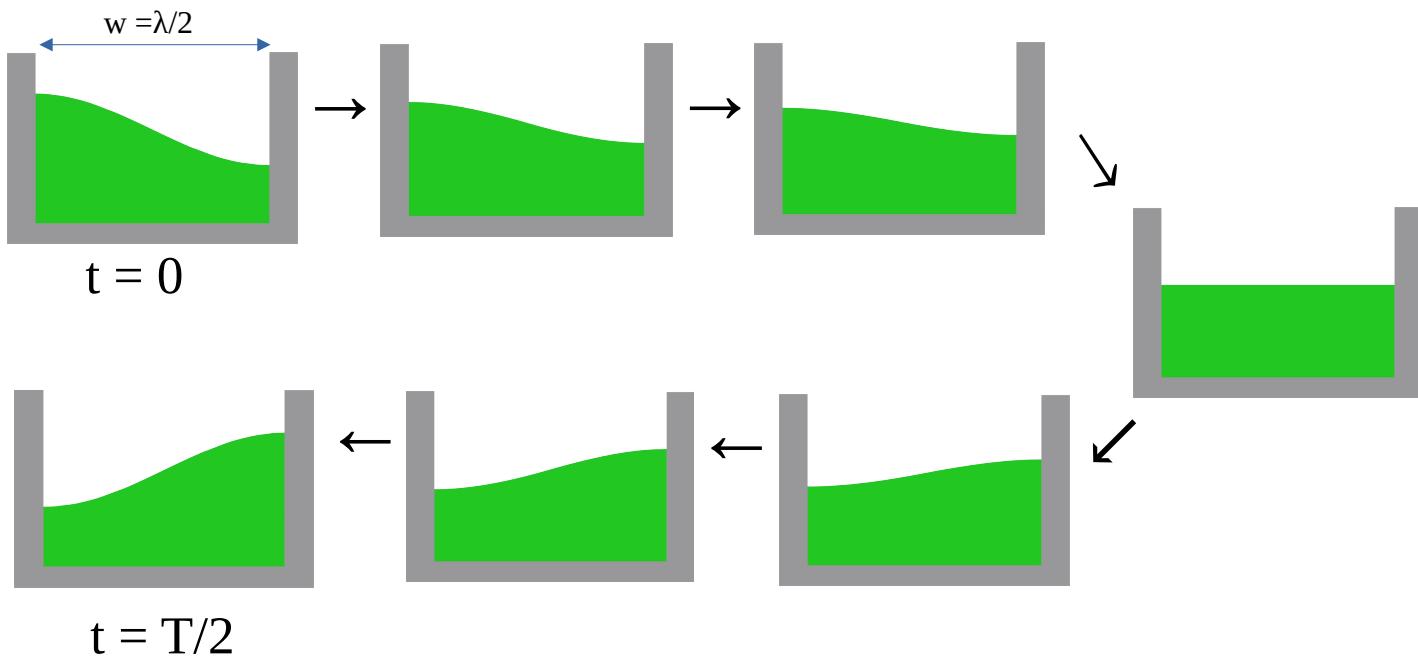
(1) 波長 λ 為水缸闊度 w 的兩倍。 $\lambda=2w$ 。此亦即是駐波的基模 (fundamental mode)。

(2) 忽略水的摩擦與缸邊的摩擦，故駐波左、右兩端為波腹 (antinode)。

(3) 水波速 $c = \lambda/T$ ，其中 T 為週期 (period)。

(4) 日常生活，大家拿着一缸水走，水在缸中上下盪來盪去，就是這個振動。

(5) 大家量度缸邊長度 w 和用 stop watch 測量，譬如 5 次振動時間，從而得到週期 T 。這樣，我們可從實驗驗證波速公式 $c = \sqrt{gd}$ 。



我們探索兩問題：

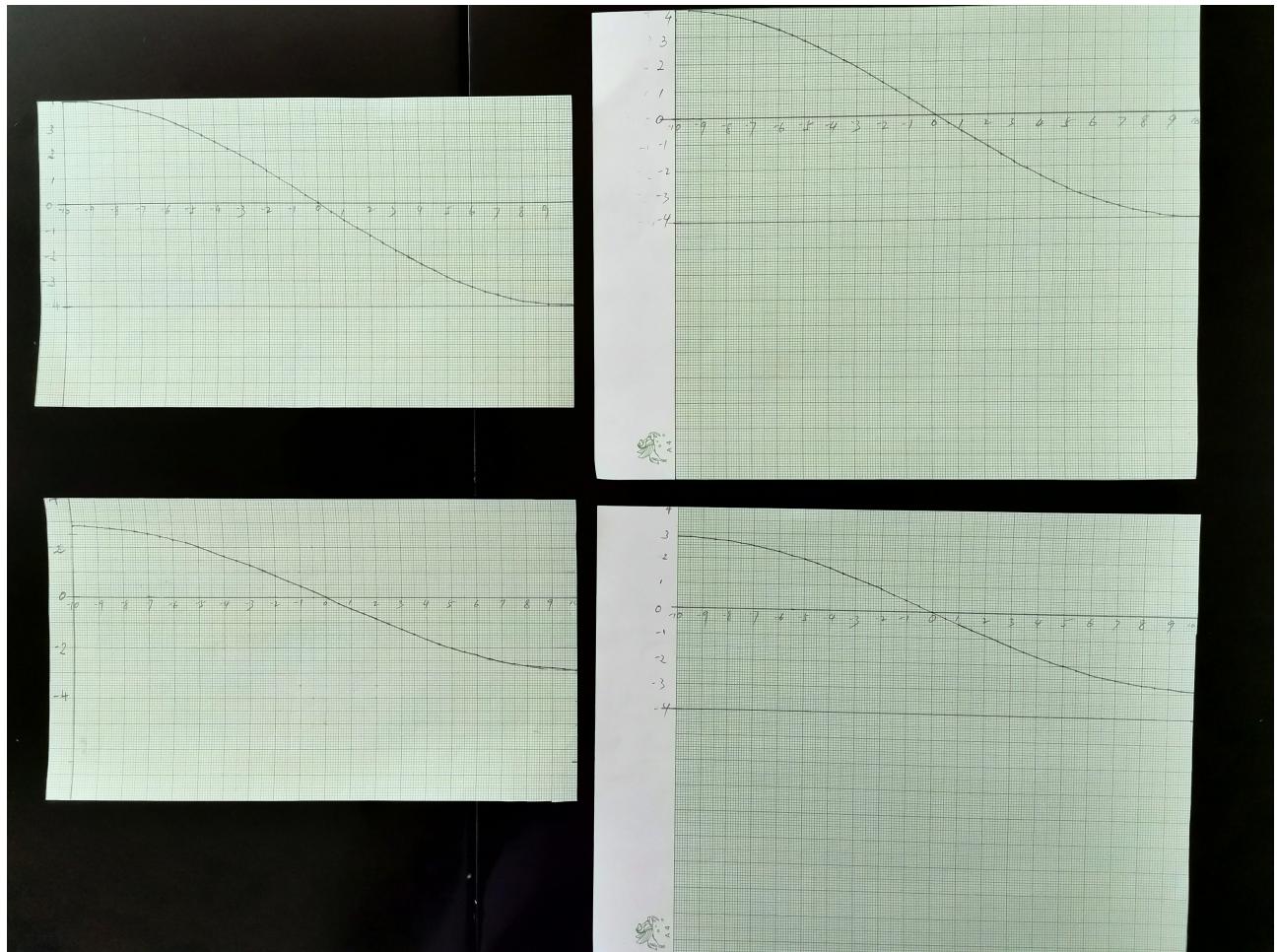
(1) 隨著上圖水駐波水面的變化，水體(water body)的質心會如何運動？

(2) 如果水深增加，那上述水體質心的運動會如何變化？

分析前，大家不妨先自行猜想結果。

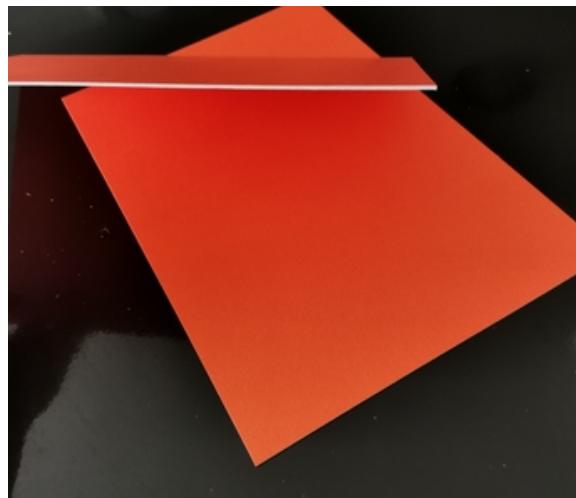
我們不是用數學去找答案，而是用一個「課堂活動」形式來找答案。這就是以垂線法來找質心（重心）。

步驟 1：把水駐波的波形畫在格仔紙（座標紙，graph paper）上



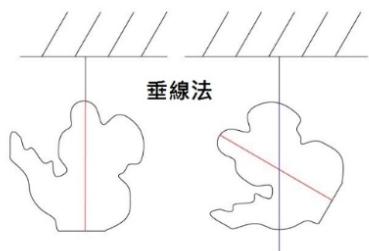
我們畫了一組較淺水的和一組較深水的；兩組的波長和振幅必須相同。每一組繪畫兩個時刻 ($t=0$ 和 $t=T/8$) 的波形。

步驟 2：把格仔紙貼在優質的厚硬咁紙上



步驟 3：用剪刀把格仔紙上的水波波形（連厚咁紙）剪下。

步驟 4：在每塊厚咁紙（連格仔紙）下兩角鑽兩小孔。然後利用「垂線法」求每一塊厚咁紙（連格仔紙）的質心（重心）。

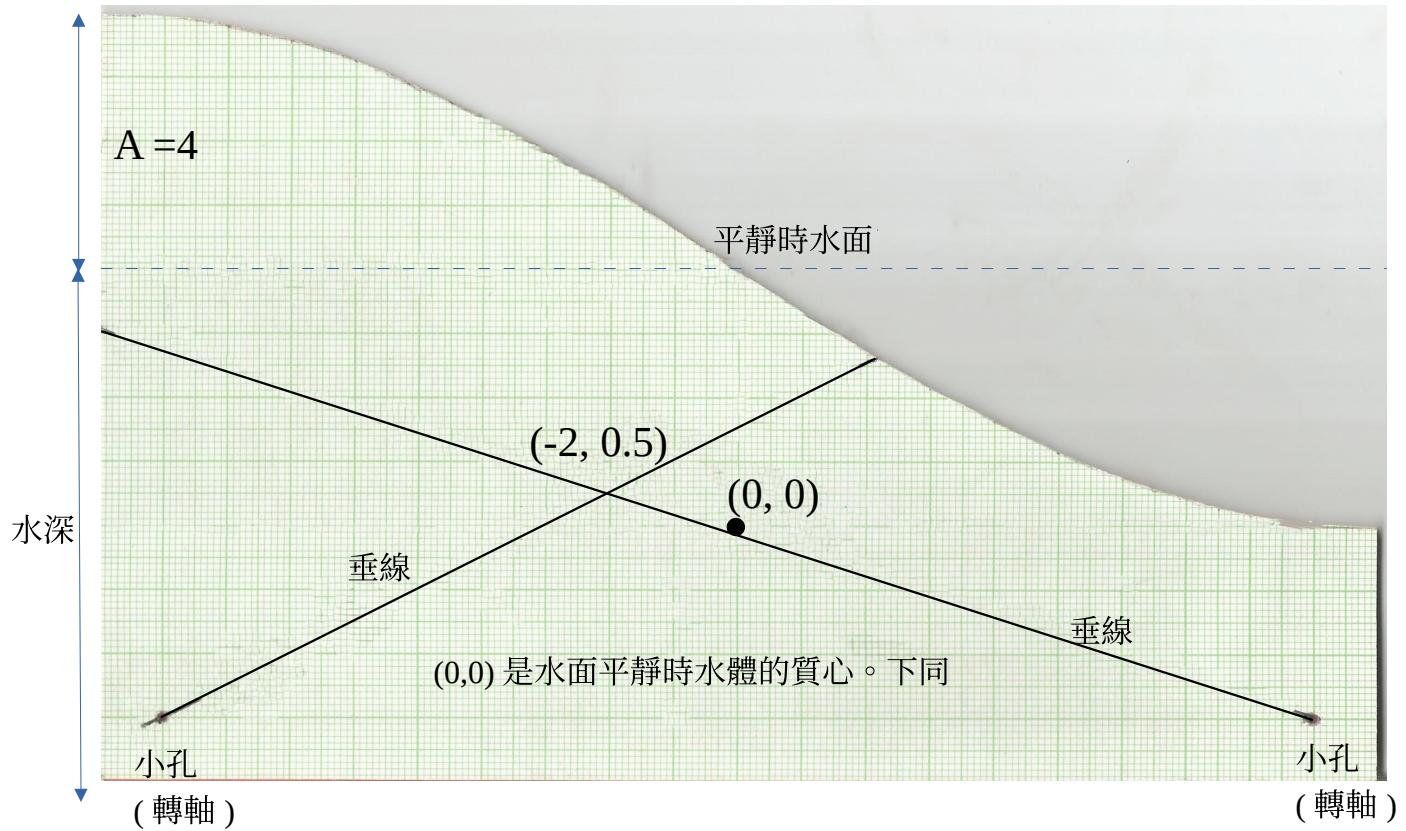


在 Youtube 以 “Plumbline finding center of gravity” 可找到很多影片介紹。

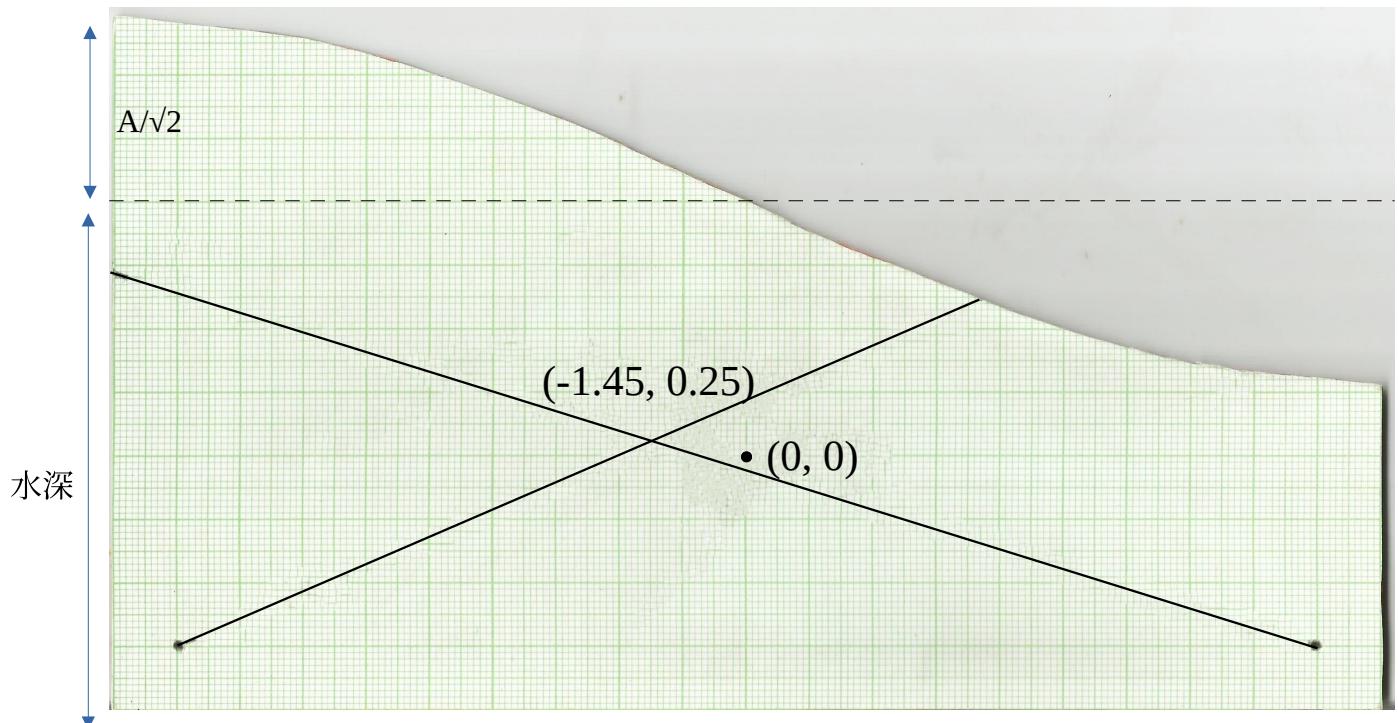
網上圖片

結果：

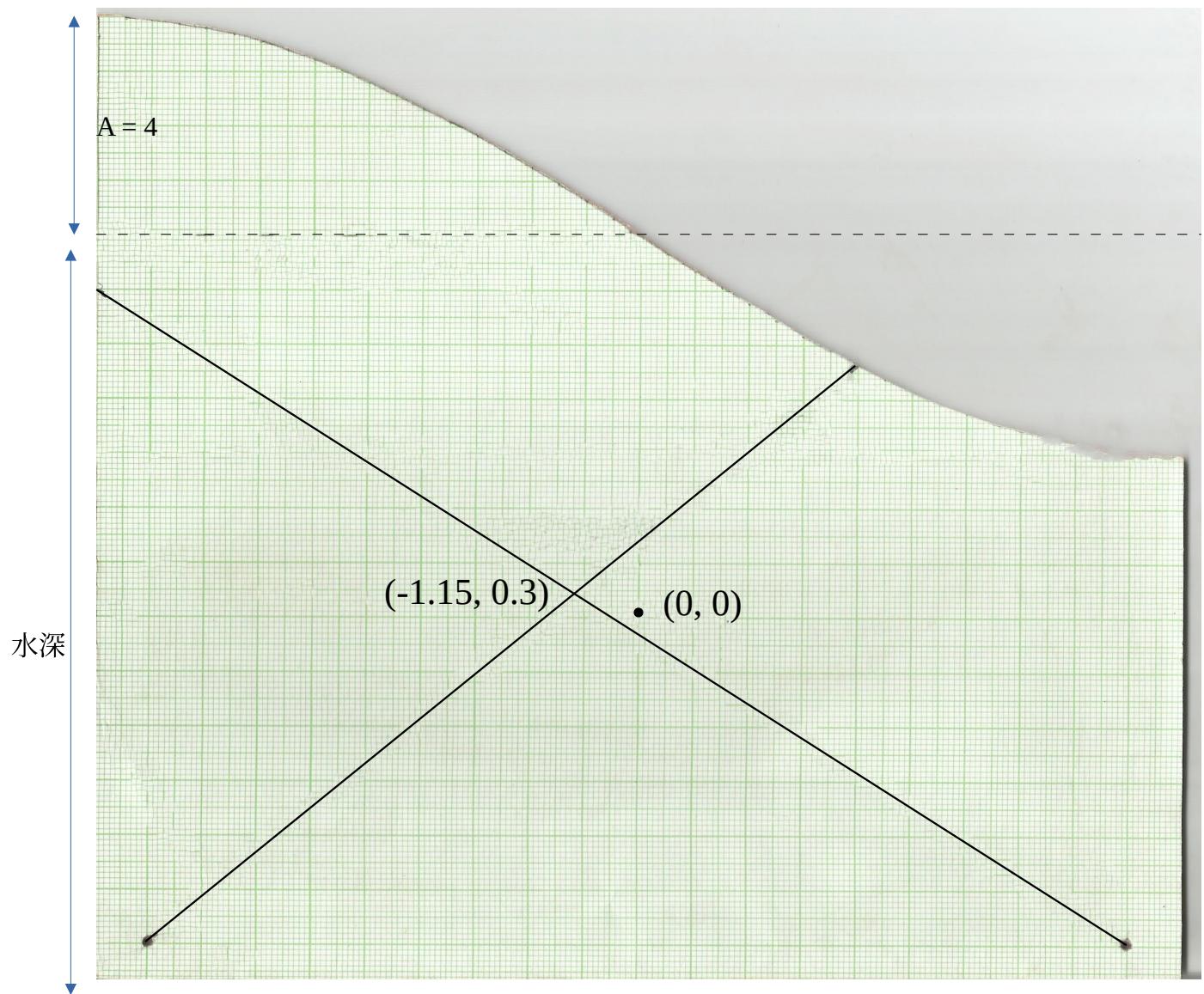
淺水區 ($t = 0$)



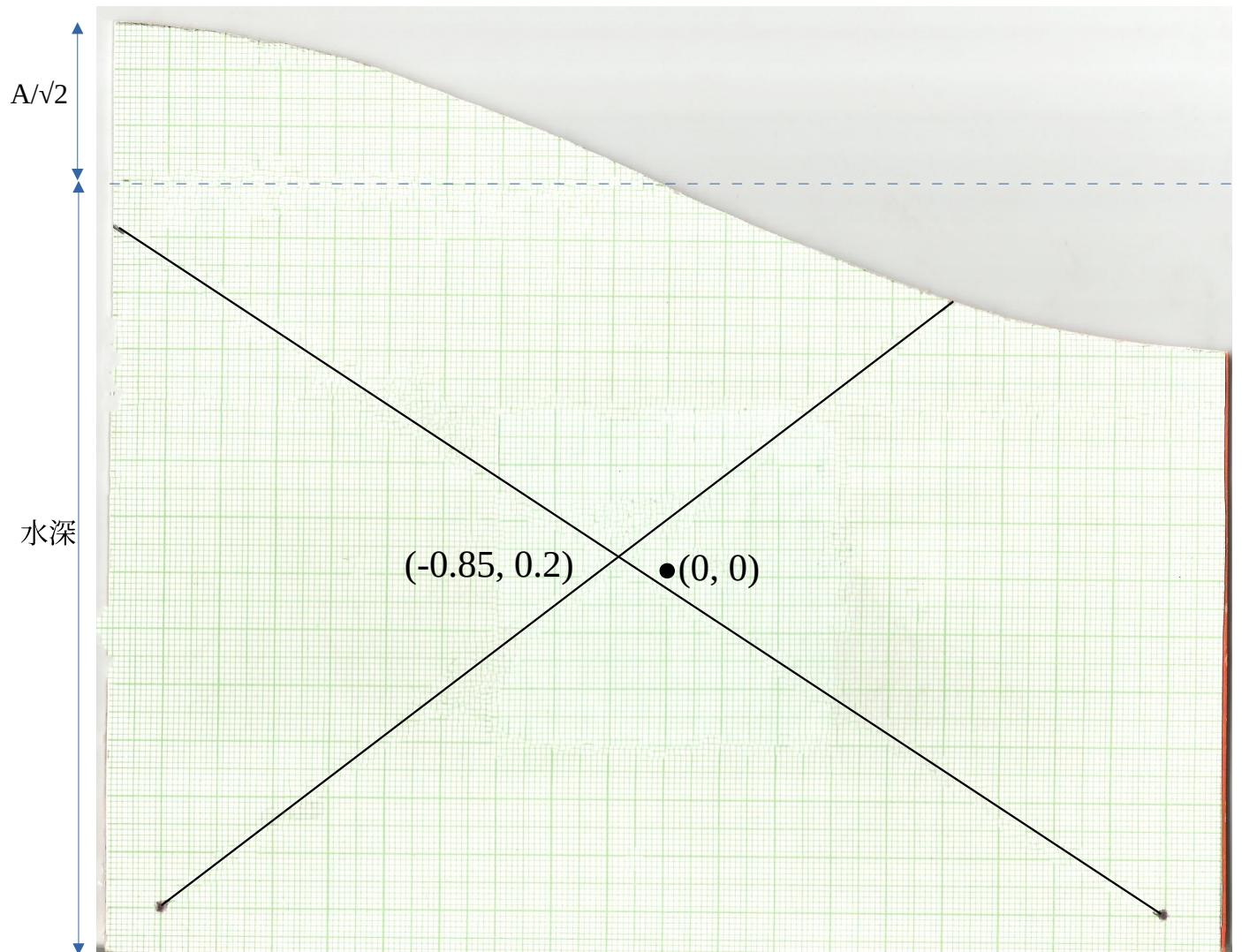
淺水區 ($t = T/8$) 左端 $y = A \cos 45^\circ$



深水區 ($t = 0$)



深水區 ($t = T/8$) 左端 $y = A \cos 45^\circ$



實驗數據：

第一組 (淺水區)

波長 $\lambda = 40$ 單位 (格仔紙以一大格為一單位，即 1cm)

振幅 $A = 4$ 單位

水深入 $d = 8$ 單位

質心軌跡 (雖然我們只用了兩個時刻的圖形，但實際我們有 5 點數據)

| | | | | | |
|----------|-----|-------|---|------|-----|
| x_{CM} | -2 | -1.45 | 0 | 1.45 | 2 |
| y_{CM} | 0.5 | 0.25 | 0 | 0.25 | 0.5 |

第二組 (深水區)

波長 $\lambda = 40$ 單位 (格仔紙以一大格為一單位，即 1cm)

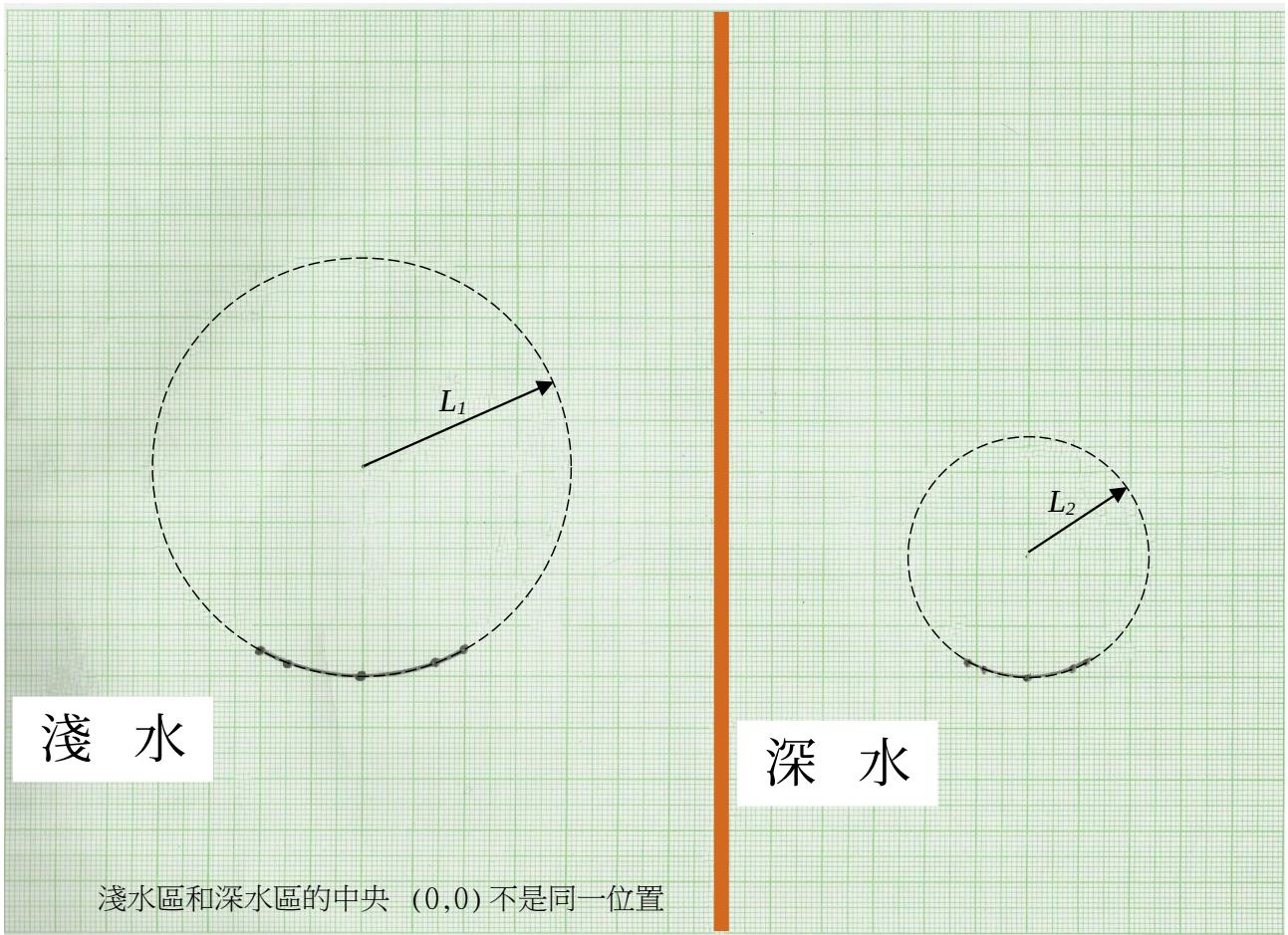
振幅 $A = 4$ 單位

水深入 $d = 13.8$ 單位

質心軌跡

| | | | | | |
|----------|-------|-------|---|------|------|
| x_{CM} | -1.15 | -0.85 | 0 | 0.85 | 1.15 |
| y_{CM} | 0.3 | 0.2 | 0 | 0.2 | 0.3 |

把以上數據點畫成曲線，那結果就很明顯了。



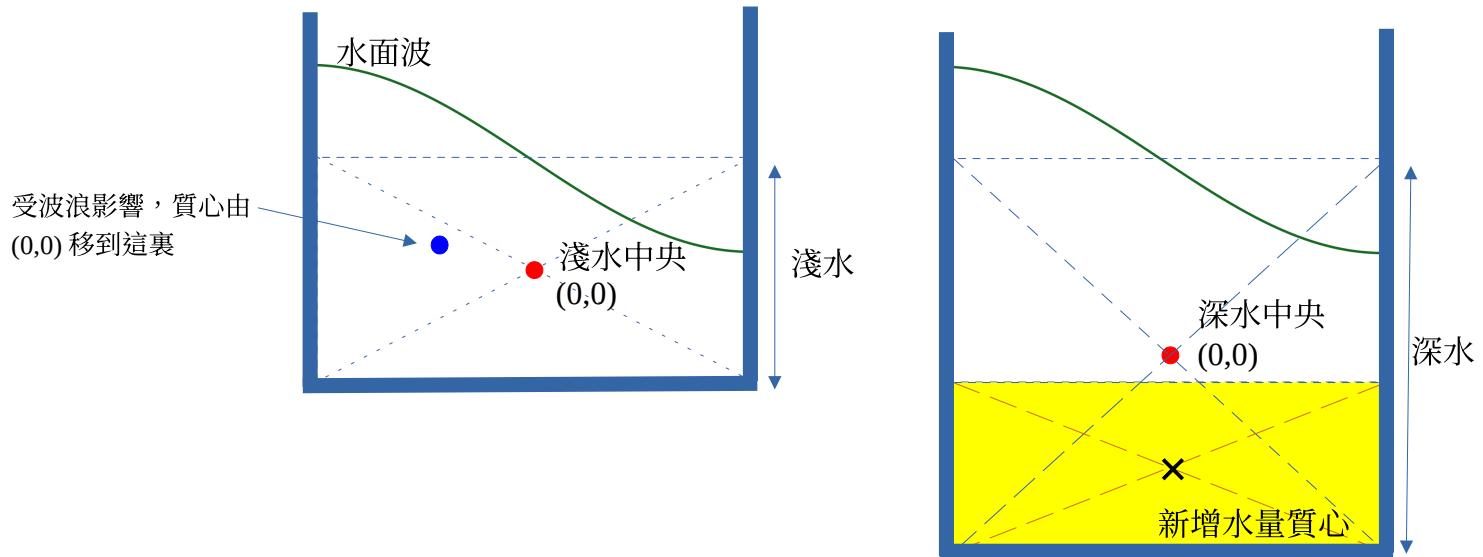
結果非常明顯

- (1) 水駐波質心進行的是圓周運動 (最低部分)。因為水波波形的變化是正弦變化 $\cos(\omega t)$ ，所以質心在圓周上的位置也是以相同形式 $\cos(\omega t)$ 來變化。換言之，質心進行的就是一個簡諧運動 (simple harmonic motion)。
- (2) 進一步說，這裏我們研究的水波是由引力引起的，所以這個簡諧運動就是 單擺運動 (simple pendulum)
- (3) 簡諧運動的週期是 $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ 。週期 (period) 不與振幅有關，只與引力加速 (g) 和單擺長度 L 有關。
- (4) 上圖可見，深水區質心的單擺運動的單擺長度比淺水區的短，即是擺動稍快，週期短一些，波速 $c = \frac{\lambda}{T}$ 。相同波長，週期較短，即是波速較快。
- (5) 若畫圖準確，不難證明軌跡圓的半徑 L 反比於水深 d 。這表示波速 $c \propto \sqrt{d}$ 。

只是軌跡說「深水區的單擺長度較短」不足夠，我們仍需要一個物理解釋。

- 水越深，水下質量越大，所以水面波浪造成的影響會不如淺水般重要。
即是，水越深，波浪影響越減退。
- 當完全沒有波浪，水粒子不會移動。當波浪影響減退，水粒子移動變小。
- 所以在深水區，水下粒子只會靠近它們的平衡點作小幅度運動（假設相同波振幅下的不同水深）。水體質心也因而靠近它的平衡點（中央原點）小幅度擺動。
- 但是，「靠近中央點」不表示曲率半徑變短。
- 重點是，深水區的中央原點也因為水加深而下降。

參看下圖

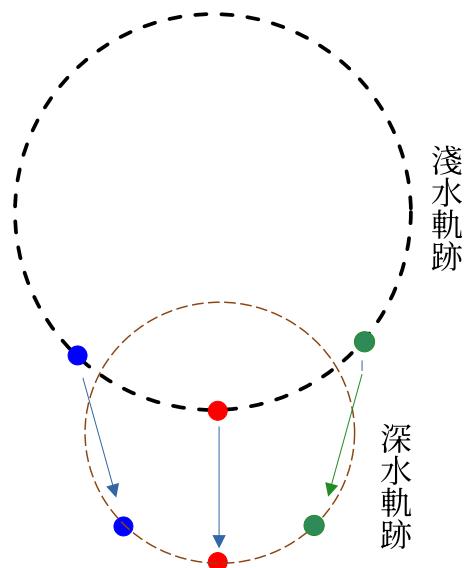


在「深水」那邊藍點去了那裏？設由「淺水」至「深水」中央紅點垂直下降了一段距離。若果藍點也垂直下降相同距離，那軌跡圓形只是平移了，半徑沒有改變。

藍點也會受增加的水(黃色部分)的影響。那黃色部分的質心在淺水藍點的右下方，所以黃色部分的加入會把藍點 拉向下和向右。

水量增加的質心在淺水藍點的右下方，所以藍點會被拉向右下方

水量增加的質心在淺水綠點的左下方，所以綠點會被拉向左下方



新增水量質心

水加深，水下質量增大，質心單擺軌跡向下移。惟增大的下方水量會把當質心擺向兩旁時拉向中央點近一些（見上圖），引致軌跡更彎曲。當 軌 跡 半 徑 變 短，重 力 (gravity) 可 更 有 效 推 動 水 體 擺 動 。

簡單而言，是水面的波浪和下方的水量在「互相比拼其影響力」。當下方水量增大，此不消但彼長，結果是質心（粒子的平均運動）只能蜷縮在以原點為中心作小幅度擺動。結果是軌跡變短而彎曲。單擺運動週期與振幅無關，越彎曲（曲率半徑短），週期越短。

討 論

- (1) 為甚麼「單擺長度越短，週期越短」？這是單擺問題，不是水波問題。簡單來說，那是因為重力 (gravity) 平均有一個較大向着平衡點的分量(component)。水下質量增加，慣性增加，不會令振動減慢嗎？不會，單擺是與懸垂物質量無關。因為重量與慣性同時增加，效果相消。
- (2) 以上分析利用了水駐波，那這個「質心 — 單擺」解釋適用於水行波 (travelling wave) 嗎？直接回答：適用。在水行波，這個「單擺」仍然存在，但不如水駐波那麼「明顯」。
- (3) 用質心來回答「為甚麼淺水波『深水快，淺水慢』？」的最大好處是不須要知道水下粒子的實際運動如何。用簡單的「垂線法」求質心座標，然後畫圖得軌跡。只要二組數據的水深不太接近，那它們軌跡的曲率半徑明顯不同，那答案就呼之欲出了。
- (4) 用「垂線法」求質心（重心），只要是用心實驗及咭紙厚度均勻，結果相當準確。如果多人一齊參與，可獲更多數據。
- (5) 中學老師可以用此設計一項課外活動，來配合水波折射這課題。或問：中學同學不一定懂甚麼是單擺運動呀？同學不要求很深入認識單擺運動。老師做一個簡單的示範實驗，就可讓學生知悉單擺的週期與振幅無關；單擺長度越短，振動越快。
- (6) 除了這個由筆者首提的「質心 — 單擺」解釋，還有另一個方法來回答「為甚麼淺水波『深水快，淺水慢』？」，這就是「水管」模型（淺水區 — 窄水管；深水區 — 粗水管）。若果你今天問 AI 這問題，雖然間中還有說這是因為「水底摩擦」，但也有利用「水管」模型來解釋。不過，這模型解釋上來也比較複雜；讀者要對水下粒子的運動 (P.1-3) 有一定認識才好明白。不單如此，至今 (2025-12 月) 筆者還未看到有利用「水管」模型而作出的完全正確解釋。

(7) 筆者深信這個「質心 — 單擺」解釋是正確的。但它是否最好，那就見仁見智了。

筆者也深覺得此解釋很適合中學同學，因為同學不須要預先掌握水下粒子的運動形態（見 P.2-3）。只要知道水面形狀是一條 cosine curve 就可以了。再通過動手做實驗求答案。這個 approach 符合中學倡議的「活動教學」。

(8) 本文只是扼要（以實驗出發）介紹了這個「質心 — 單擺」模型，還是省略了一些細節。若閣下希望可以瞭解更全面，及以理論推導有關數式，請閱讀筆者在 IOP 的 Physics Education 發表的拙文

“Revisiting the simple model of the late Professor Frank S Crawford for water wave dispersion relations, and thus obtaining a physical explanation of the depth-dependence of shallow water wave speeds”

(<https://doi.org/10.1088/1361-6552/ae1abe>)

(大學圖書館可看到和下載，地區公共圖書館或都可以)

作者：吳老師 (Chiu-King Ng)

<https://ngsir.netfirms.com>

<http://phy.hk>

電郵：feedbackAB@phy.hk 其中 AB 是 23 之後的質數

(2025-12-13)