同學問：「公式 $v = \lambda f$　不就是表示了『波速 v 正比於頻率 f』嗎？」

中學數學：

若 $x \propto y$，則 $x = ky$，其中 k 為非零常數。

反過來說，

$p = qr$ 不表示 $p \propto q$，除非 r 是非零常數。

所以說，

- $v = f\lambda$　表示了「v 正比於 f」是錯誤的，因為 λ 並不是常數。
- 反之，v、f 和 λ 三者中 v 有時候是常數，有時候不是。若 v 真是常數，那可以說「λ　反比於頻率 f」。
- 但波速 v 是常數或不是常數，這要從有關的物理才可得知，斷不可以從 "$v = f\lambda$" 知道。

甚麼波動的波速 v 是常數？甚麼波動的波速 v 與頻率有關？

讀者可否舉一些例子？

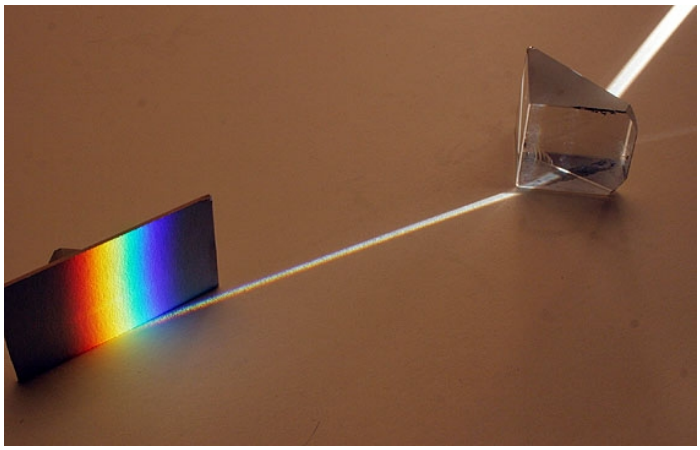
Case 1: 波速 v 是常數 (與頻率無關)

- 例子： 電磁波在真空傳播

  聲波在空氣傳播（只是近似是這樣）

Case 2: 波速 v 與頻率有關 (但絕不是正比或反比那麼簡單)

- 最著名的例子是光經過玻璃或水的色散 (dispersion)現象。



在玻璃，紅光 (低頻) 比紫光 (高頻) 行得稍快一些。

波速 v 與甚麼有關或無關，是不能從 "$v = f\lambda$" 知道。這是要從有關的物理才可得知。

公式 "$v = f\lambda$" 只是 告 訴 我 們 v 、f 與 λ 三 者 的 數 學 關 係，但 不 能 告 訴我們它們之 間 的 因 果 關 係。

對初學者而言，它們之間的因果關係簡 化 來說是這樣：

- 頻率 f 純粹決定於發射器。水波槽的振動器振得越快，水波越高頻；揚聲器的振動膜振動越快，產生的聲音越高頻。甚麼顏色光源發出甚麼顏色(頻率)光。（多普勒效應 Doppler effect :波源的速度也會決定發出的波的頻率。著名例子是“紅移”現象）。

  波動從發射器發射後，頻率 f 就不會改變。頻率是一個波的“身份編碼”，無論之後發生反射、折射衍射、干涉，... 或甚麼現象，波的頻率不會發生改變。

- 波速 v 決定於傳播介質及有可能也與頻率有關。
  - ➔ 聲音在空氣，液體，或固體不同介質的傳播速度有別。
  - ➔ 光在真空，水，或玻璃不同介質的傳播速度有別。
  - ➔ 不同顏色 (頻率) 光在玻璃或水的速度也不同。
  - ➔ 水波槽的水波波速與水深有關；深水海洋的水波波速與水深無關，但與水波的頻率(波長)有關。
  - ➔ 行走中的觀察者會看到不一樣的波速（如車上乘客看街上行人），這令觀察者接收到的波頻率有別於波的本有頻率（多普勒效應）。

- 知道了波速 v 及頻率 f 之後，波長 λ 由 $\lambda=\frac{v}{f}$ 決定。

附 加 討 論：

1. 電阻功率可以寫為

$P=I^2R$ .....(1.1)

但亦可寫為 $P=\frac{V^2}{R}$ .....(1.2)

式 (1.1) 說 $P\propto R$，但式 (1.2) 又說 $P\propto\frac{1}{R}$，為甚麼這麼矛盾？

2. 向心加速

$a=\omega^2 r$ .....(2.1)

但亦可寫為 $a=\frac{v^2}{r}$ .....(2.2)

式 (2.1) 說 $a\propto r$，但式 (2.2) 又說 $a\propto\frac{1}{r}$，為甚麼這麼矛盾？

又是那一句，若 $x = yz$，只有當 y 是常數時，x 才可以說與 z 正比。

- $P=I^2R \Rightarrow P\propto R$，這個要電流 I 是常數時才成立。

  譬如電阻在串聯 (in series) 時，I 就是常數，那時的確 $P\propto R$。

- $P=\frac{V^2}{R} \Rightarrow P\propto\frac{1}{R}$，這個要電壓 V 是常數時才成立。

譬如電阻在並聯 (in parallel) 時，V 就是常數，那時就是 $P \propto \frac{1}{R}$ 。

- $a = \omega^2 r \Rightarrow a \propto r$ ，這個要大家的角速度 ω 相同時才成立。譬如放在同一個轉盤上不同位置的物體，大家的 ω 相同，向心加速正比於曲率半徑 r 。
- $a = \frac{v^2}{r} \Rightarrow a \propto \frac{1}{r}$ ，這個要大家的線速率 v 相同時才成立。譬如一輛車以相同車速 v 轉不同的彎，向心加速反比於曲率半徑 r 。

練習：

1. 已知水波槽水波的波速 v 與水深 h 的關係是

$$v=\sqrt{gh} \quad , \qquad \text{.....} \ (1.1)$$

其中 g 是引力加速度。若果水波槽的水深減半，問頻率、波長和波速如　何改變？

2. 式(1.1)只適用於淺水區(淺水區水深也可以有變化)，但何謂之「淺水」? 這並不是以人的標準來說的，而是相對水波的波長。換言之，當 $h \ll \lambda$ ，式 (1.1) 就會大概成立。

請同學在網上搜尋海嘯(tsunami)中海浪波的典型波長是多少？如果與一般海洋的水深比較，上述條件是否滿足？

有關的一則新聞 *https://www.ettoday.net/news/20220117/2170680.htm*

筆者向人工智能 AI 發問以下問題：Water waves move slower in a shallow region in a ripple tank. What is the cause of it?

2024 年問：

As we know, water waves move slower in a shallow region in a ripple tank. What is the cause of it?

Copilot

In a ripple tank, when water waves transition from **deep water** to a **shallow region**, they exhibit a phenomenon called **refraction**. Let's explore the cause behind this:

1. **Change in Wave Speed:**
   - As waves encounter the boundary between deep and shallow water, their speed changes.
   - In deeper water, waves travel faster due to less friction with the bottom.
   - In shallower regions, the waves slow down because of increased friction with the bottom.

淺水區水波行慢了是因為水波與水底的摩擦增大(因為與水底較接近)了！？Copilot 這說法胡說八道。

1. 公式(1.1)是假設了水是 non-viscous (沒有摩擦)而推導出來，所以公式中沒有 viscosity 這一參數。亦即是在假設水是 non-viscous (frictionless)之下已表現出「淺水區域的水深影響着波速」這一特性來。

2. 水波在淺水區相比在深水區是行得慢一些，但不是水波在淺水區會越行越慢！若果水波行慢了真是因為水波與水底的摩擦增大，那當水波在淺水區這「增大的摩擦」就會一直繼續影響着它，結果就是把水波變得越來越慢（減速）了。

3. 水波在淺水區從深水進入淺水，波速慢了；但從淺水區返回深水區時，波速變快了，這又如何可從「水底摩擦」得到解釋？無論摩擦的數值如何，它總不可能把水波推快！

2025 重問：

Water waves move slower in a shallow region in a ripple tank. What is the cause of it?

下午5:14

o4-mini

In a ripple-tank (and in the ocean) the key point is that "shallow-water waves" satisfy a different dispersion relation than "deep-water waves." In particular:

1. For small-amplitude gravity waves on water of depth h and wavelength λ, the general phase speed is
   $c = \sqrt{[(g\lambda/2\pi)\cdot\tanh(2\pi h/\lambda)]}$.
2. In the **deep-water limit** ($h \gg \lambda$), $\tanh(2\pi h/\lambda) \to 1$ and
   $c_{deep} \simeq \sqrt{(g\lambda/2\pi)}$,
   so longer waves go faster.
3. In the **shallow-water limit** ($h \ll \lambda$), $\tanh(2\pi h/\lambda) \approx 2\pi h/\lambda$ and
   $c_{shallow} = \sqrt{(g h)}$,
   which depends only on depth h, not on wavelength. Thus as h decreases, $c = \sqrt{(g h)}$ decreases.

What's "physically" going on?

- In *deep* water the fluid motion is confined to a layer of order $\lambda/2\pi$ near the surface: only that "skin" of water needs to move, so the wave can travel relatively fast.
- In *shallow* water the bottom is close enough that virtually the **entire** water column (down to the tank floor) is involved in the motion. You're pushing a larger mass of water for the same restoring force (gravity), so the wave travels more slowly.

水波槽

In short:
• **Cause:** the bottom boundary "flattens" the fluid orbits so all the water moves, increasing the effective inertia.
• **Result:** the phase speed drops to $c = \sqrt{(g h)}$, which decreases as the depth h is reduced.

下午5:14

這一回，o4-mini 給出很一樣的答案，不再是甚麼「水底摩擦」。

這肯定是一大改進，但仍存在疑問。

(1)水波槽水波是由水面以引力作回復力 (restoring force) 引起的波動 (surface gravity wave)，這是事實。 那解釋了為甚麼公式中 $v=\sqrt{gh}$ 會出現引力加速 g 。

(2)o4-mini 文中的 deep water 是滿足 h >> λ 的區域 (例如水波槽的短波長水波去了大水池)。 但在水波槽，無論是淺水區，或深水區，都是滿足條件 h << λ。 水波槽的深水區是 shallow water 水比較深的區域，並不是文中說的 deep water。

(3) 在條件 h << λ 之下，由水面至水底水柱整體一致運動。這是事實。

(4) o4-mini 的「質量」解釋存在只少一個疑問 :

水波槽的深水區，由水面至水底整個水柱的質量不是更大嗎 ? 慣性不是更大嗎 ? 那為甚麼水波在那裏比水波槽的淺水區更行快一些 ?

✷✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷✷

作者：吳老師 (Chiu-King Ng)

https://ngsir.netfirms.com

http://phy.hk

電郵：feedbackWZ@phy.hk 其中 WZ 是 23 之後的質數