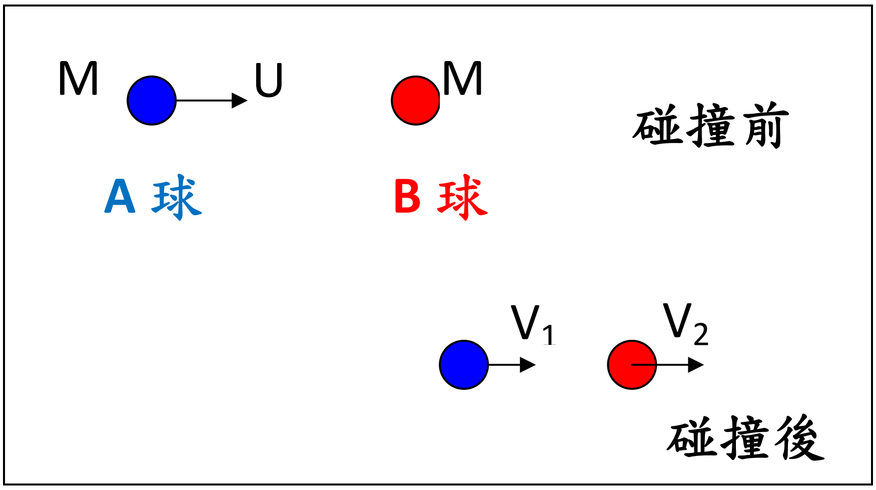
碰撞後必成直角的原因

本文討論的碰撞是

1. 撞與被撞物件質量相同。
2. 碰撞為完全彈性，即沒有動能損失。
3. 被撞物件在碰撞前是靜止。

(I) 情況一：正碰撞 (head-on collision)



(a) 憑直觀得結果：

兩球質量相同，碰撞中動量和動能須要守恆。

若發生

- 碰撞後，藍色停下來。
- 紅球以藍球的入射速度彈出。

即是

藍色的入射球的動量和動能完全傳給被撞的紅色球。

那時，動量和動能不就是守恆嗎？

（b）　用數學解方程組，印證（a）的想法

動量守恆　$MU = MV_1 + MV_2$　（1）

動能守恆　$\frac{1}{2}MU^2 = \frac{1}{2}MV_1{}^2 + \frac{1}{2}MV_2{}^2$　（2）

簡化後，

（1）變成　$U - V_1 = V_2$　（3）

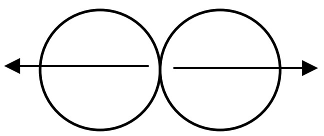
（2）變成　$(U - V_1)(U + V_1) = V_2{}^2$　（4）

（4）÷（3），得　$U + V_1 = V_2$　（5）

解聯立方程（3）和（5),

$$V_1 = 0,\quad V_2 = U$$

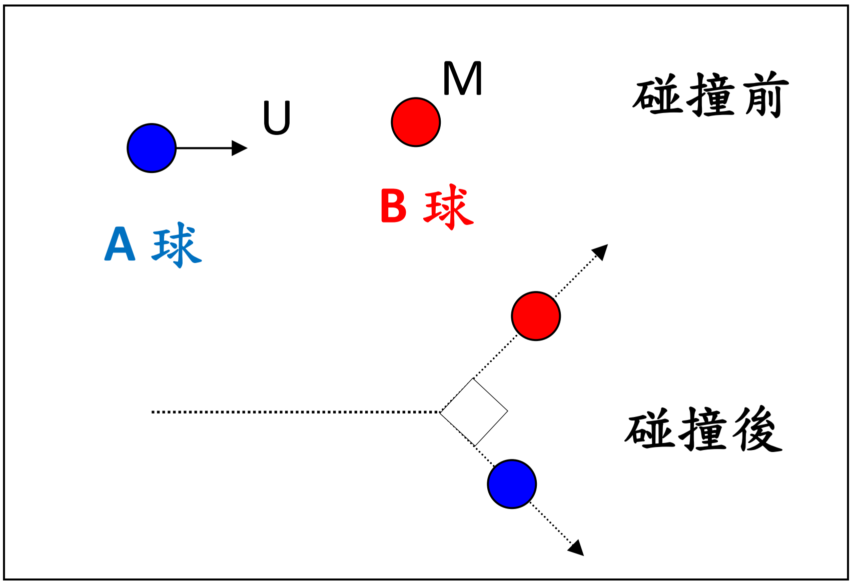
兩球互撞，它們施力對方。根據牛頓第三定律，此兩力的大小相同，方向相反。



根據力學定理，

力對物體作功 (work) = 物體動能改變 (change in KE) 。

（II）斜碰撞 (oblique collision)

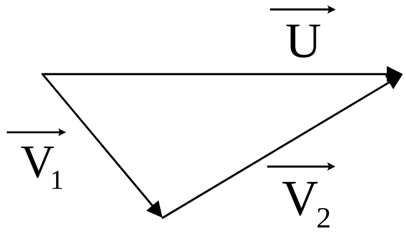


碰撞後，兩球彈出的方向必成直角。

動量守恆 $$M\overrightarrow{U} = M\overrightarrow{V_1} + M\overrightarrow{V_2} \tag{6}$$

動能守恆 $$\frac{1}{2}MU^2 = \frac{1}{2}MV_1{}^2 + \frac{1}{2}MV_2{}^2 \tag{7}$$

（6）變成 $$\overrightarrow{U} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} \tag{8}$$



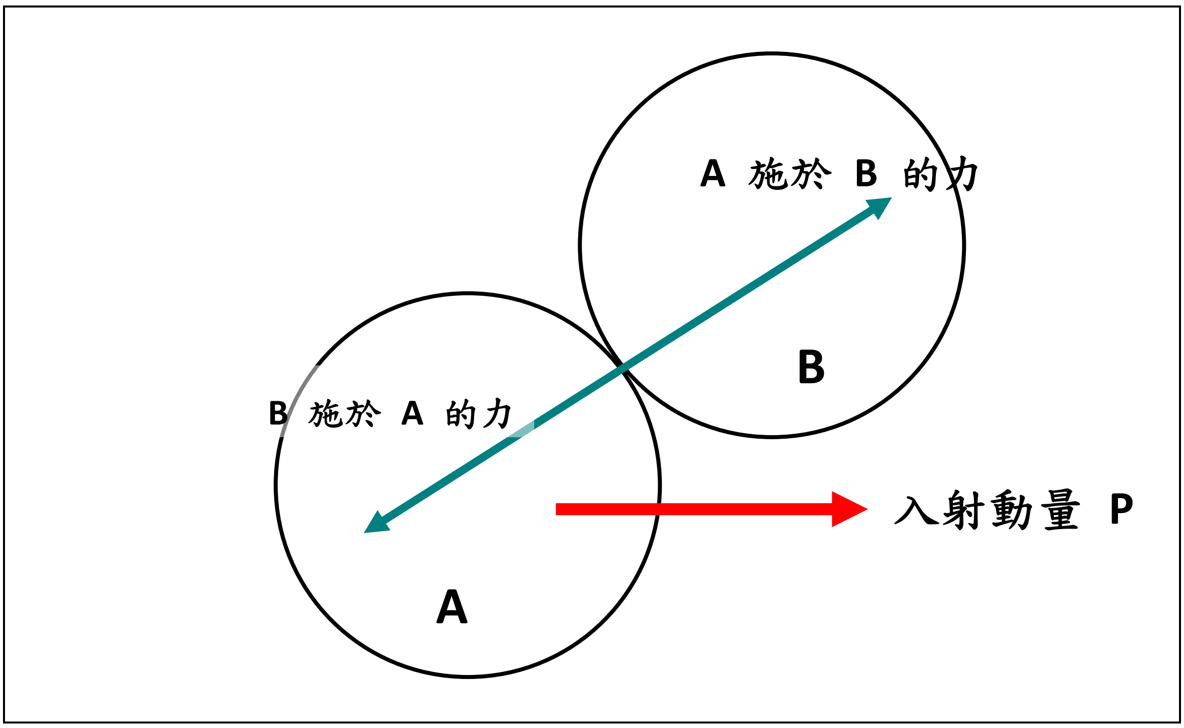
（7）的要求 $$U^2 = V_1^{\ 2} + V_2^{\ 2} \qquad (9)$$

（9）表示上圖 **U, V_1** 和 **V_2** 形成的必然是一個直角三角形。

以上是標準的解釋說明。

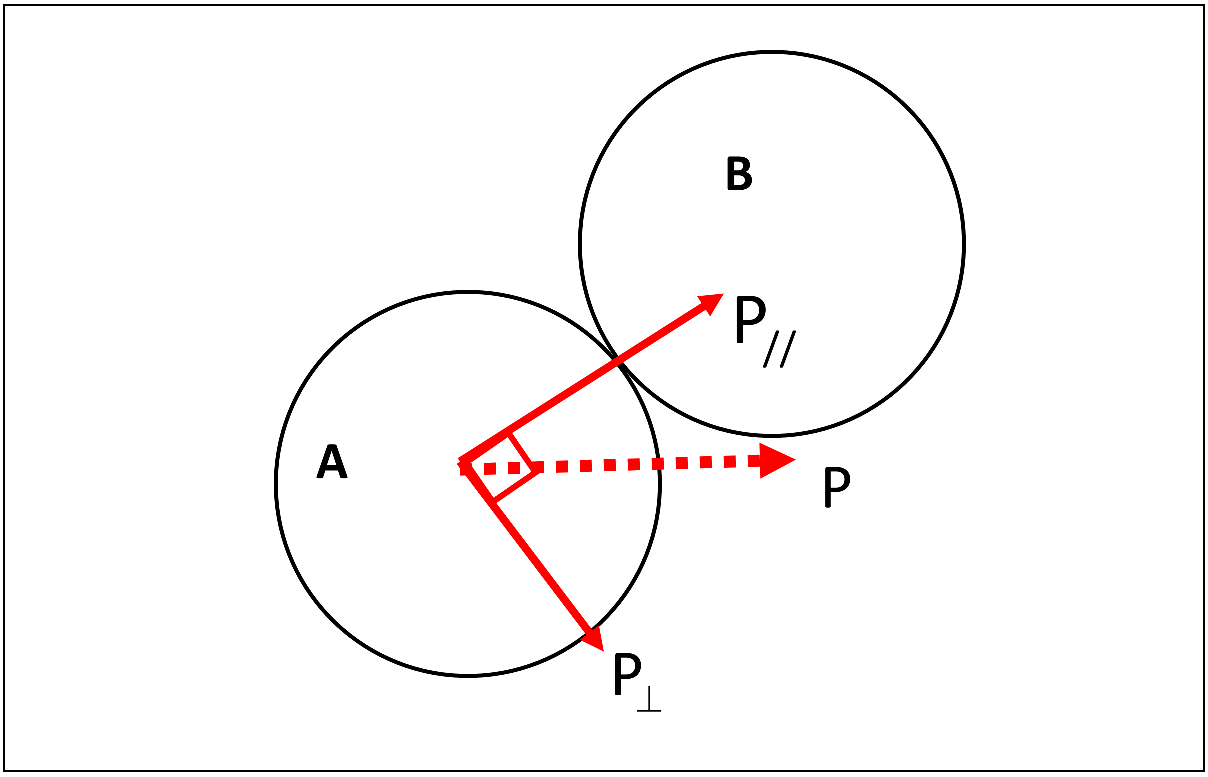
本文補充一個常被疏忽觀點，就是（I）正碰撞的結果和（II）斜碰撞的結果本質上是一樣。

兩球互撞時的作用力，



將 A 的入射動量 **P** 分解，一為平行該兩力的方向($P_{//}$)，另一

為垂直力的方向（$P_{\perp}$）。



留心觀察上圖，它實則不過是（I）正碰撞的情況外再加上一個 $P_{\perp}$ 而已！

上面已說明，動能的交換是靠力作功。但這法向反作用力（假設所有面平滑，沒有摩擦力）是垂直於 $P_{\perp}$，所以無論如何，碰撞時的力改變不了 $P_{\perp}$。

$P_{//}$ 和 $P_{\perp}$ 是獨立的，

- $P_{//}$ 就像正碰撞時一樣，A 完完全全地把它轉移給 B。
- A 自己只保留 $P_{\perp}$。

即是，最後，B 用 $P_{//}$ 彈出，A 則用 $P_{\perp}$ 彈出，這就是它們的方向必成直角的原因。

因為動能 $KE = \dfrac{P^2}{2M} = \dfrac{{P_{//}}^2}{2M} + \dfrac{{P_{\perp}}^2}{2M}$，上述的動量轉移後，動能也是守恆的。

吳老師 (Chiu-king Ng)

http://www.ngsir.netfirms.com